Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ:
УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Составление и общая редакция
В. И. Мицкевича

Новополоцк 2006

УДК 528.063(075.8)
ББК 26.11я73
В 93

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А. Ф. БОРУН, начальник Полоцкого геодезического центра РУП «Белгеодезия»;
И. А. ЦЫБЕНКОВ, начальник партии Полоцкого геодезического центра РУП «Белгеодезия»;
Л. А. ЧЕРКАС, канд. техн. наук, доцент кафедры геодезии и кадастров

Рекомендовано к изданию методической комиссией геодезического факультета

В 93 **Высшая геодезия: уравнительные вычисления :** учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1- 56 02 01 «Геодезия» / сост. и общ. ред. В. И. Мицкевича. – Новополоцк : ПГУ, 2006. – 76 с.
ISBN 985-418-456-0

Разработан на основе общеобразовательного стандарта РД РБ 02100.5.201-98. Приведены темы изучаемого курса, лекционных и лабораторных занятий, их объем в часах. Изложены основы уравнивания геодезических сетей. Представлены методические указания к выполнению лабораторных работ и вопросы к экзамену.

Предназначен для студентов геодезических специальностей вузов, специалистов.

УДК 528.063(075.8)
ББК 26.11я73

ISBN 985-418-456-0

ВВЕДЕНИЕ

Уравнительные вычисления занимают главную роль в обработке результатов геодезических измерений. Условием и причиной возникновения задачи уравнивания является наличие избыточно измеренных величин и неизбежность малых ошибок измерений.

Основными способами уравнивания являются коррелатный и параметрический способы, изложенные в учебно-методическом комплексе.

Структура УМК разработана на основе стандарта РД РБ 02100.5.201-98 по специальности Т 21.01.00 (1-56 02 01) – «Геодезия», рабочего учебного плана и рабочей программы по дисциплине «Высшая геодезия», составленной на кафедре прикладной геодезии и фотограмметрии УО «Полоцкий государственный университет».

В структуру УМК входят: рабочая программа, конспект лекций, методические указания к выполнению лабораторных работ, вопросы к экзамену. Согласно учебному плану, на изучение дисциплины отводится 56 часов. Из них: 28 ч – лекции, 28 ч – лабораторные занятия.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цель и задачи дисциплины

Курс высшей геодезии состоит из четырех разделов: основные геодезические работы; уравнительные вычисления; сфероидическая и теоретическая геодезия. Высшая геодезия: уравнительные вычисления изучает способы математической обработки результатов геодезических измерений, включая предварительные, уравнительные и окончательные вычисления.

Цель дисциплины – дать необходимые теоретические знания и практические навыки будущему инженеру-геодезисту по уравнительным вычислениям для решения научно-практических задач геодезии.

В результате изучения дисциплины студент должен освоить:

– уравнивание геодезических сетей коррелатным способом;

– уравнивание геодезических сетей параметрическим способом;

– теоретические основы уравнивания различных геодезических построений.

Для успешного применения знаний на практике студент должен уметь:

– выполнить обработку журналов геодезических измерений;

– знать стратегию уравнивания геодезических построений;

– использовать программные продукты матричных вычислений на ПЭВМ.

Содержание дисциплины

Лекционные занятия

Название темы	Содержание	Объем в часах	
		Д	З
1	2	3	4
1. Введение в уравнительные вычисления	Основные этапы математической обработки геодезических сетей	1	1
2. Коррелатный способ уравнивания	Сущность коррелатного способа уравнивания. Основные матричные формулы алгоритмов уравненных и окончательных вычислений	1	1
	Виды независимых условных уравнений и методы их идентификации и подсчета	2	1
	Условные уравнения фигур, горизонта, сумм и разности углов, а также дирекционных углов	3	1
	Условные уравнения сторон (базисов) и полюсов	2	1
	Условные уравнения координат в полигонометрии и триангуляции	4	1

	Общий прием составления условных уравнений в трилатерации	1	1
	Практические основы двухгруппового уравнивания триангуляции	1	1
	Определение допустимых величин свободных членов любых условных уравнений	1	1
3. Параметрический способ уравнивания	Сущность параметрического способа уравнивания	1	1
	Виды нелинейных параметрических уравнений при математической обработке плановых геодезических сетей	1	1
	Приведение нелинейных параметрических уравнений к линейному виду	1	1
	Основные матричные формулы алгоритмов уравнительных и окончательных вычислений	1	1
	Вывод формул линейных параметрических уравнений для: – дирекционных углов; – горизонтальных направлений; – горизонтальных углов; – измеренных расстояний	7	2
	Оценка точности функций измеренных и уравненных величин	1	1
ВСЕГО:		28	16

Лабораторные занятия

Содержание	Объем в часах	
	Д	З
1	2	3
1. Предварительная обработка угловых и линейных измерений	8	4
2. Двухгрупповое уравнивание звена триангуляции коррелатным способом	12	8
3. Уравнивание звена триангуляции параметрическим способом	8	4
ВСЕГО:	28	16

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Основная литература

1. Маркузе, Ю. И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1990. – 240 с.

2. Машимов, М. М. Уравнивание геодезических сетей / М. М. Машимов. – М. : Недра, 1989.

3. Яковлев, Н. В. Практикум по высшей геодезии / Н. В. Яковлев. – М. : Недра, 1982. – 368 с.

Дополнительная литература

1. Маркузе, Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1989. – 248 с.

2. Яковлев, Н. В. Высшая геодезия / Н. В. Яковлев. – М. : Недра, 1990. – 445 с.

Учебно-методические материалы

1. Методические указания к пользованию комплексной программой / сост. В. И. Мицкевич. – Новополоцк : ПГУ, 1988.

2. Комплекс программ для геодезических вычислений на ЭВМ / сост. С. В. Маковский, В. И. Мицкевич. – Новополоцк : ПГУ, 1988 – 2005.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Математическая обработка геодезических сетей состоит из следующих этапов:

a. Предварительные вычисления.
b. Уравнивание.
c. Окончательные вычисления.

ЭТАП – *a*

Цель предварительных вычислений:

1. Приведение результатов измерений к центрам пунктов, на поверхность относимости и на плоскость проекции Гаусса.

2. Контроль и отбраковка результатов измерений, а также оценка их точности.

3. Подготовка материалов полевых измерений к уравниванию.

Замечание к 2. В современных условиях контроль и отбраковка результатов измерений осуществляется вместе с уравниванием.

ЭТАП – *b*

1. Найти такие поправки в измеренные величины, которые ликвидируют невязки при соблюдении условия $V^T PV = \min$.

2. Повышение точности функций измеренных величин.

Замечание. В.Д. Большаков писал: «Правильная математическая обработка равносильна повышению точности самих измерений».

ЭТАП – *c*

1. Оценка точности результатов уравнивания.

2. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин.

Условием и причиной возникновения задачи уравнивания является наличие избыточно измеренных величин и неизбежность малых ошибок измерений.

2. КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Существуют два основных способа уравнивания: коррелатный способ (где решается задача на условный экстремум) и параметрический (в нем решается задача на абсолютный экстремум).

Рассмотрим коррелатный способ.

Основные положения и матричные формулы

Пусть на объекте выполнено *«N»* измерений $y_1, y_2, \ldots, y_N$. Причем известно, что для построения данной геодезической сети без единого контроля требуется t измерений (называются необходимыми измерениями). При этом $N \geq t$. Разность $r = N - t$ определяет число избыточных измерений. Это число так же равно числу независимых условных уравнений, связывающих измеренные величины некоторыми функциональными зависимостями:

$$\varphi_j\left(y_1, \ldots, y_N\right) = W_j, \qquad j = \overline{1,r} \tag{1}$$

это условное уравнение связи, где $y_1, y_2, \ldots, y_N$ – измеренные величины.

Пусть найден вектор поправок $V = \left(v_1, v_2, \ldots, v_N\right)^T$, который ликвидирует невязки условных уравнений. $\varphi_j\left(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \ldots, y_N + v_N\right) = 0$, но данная задача неоднозначна, так как неизвестных поправок N, а уравнений r. При этом $N > r$. Поэтому отыскивают V под условием, например, если $V^T P V = \min$, то имеем условие МНК (метод наименьших квадратов).

Функция $\varphi(y)$, как правило, нелинейна, и ее приводят к линейному виду, используя частные производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}$, значения которых будут коэффициентами условных уравнений при поправках в измеренные величины.

Учитывая, что v_i малые величины и обозначая их через dy_i, используя ряд Тейлора, можно записать

$$\varphi\left(y_1 + dy_1, \ldots, y_N + dy_N\right) = \varphi\left(y_1, \ldots, y_N\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right) dy_i = 0$$

или

$$\varphi\left(y_1 + v_1, \ldots, y_N + v_N\right) = \varphi\left(y_1, \ldots, y_N\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right) v_i = 0$$

или

$$dW + W = 0, \tag{2}$$

где dW – дифференциал невязки W.

$$dW = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)dy = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)v_i$$

Таким образом, вместо нелинейного условного уравнения (1) имеем для одного условного уравнения в линейном виде

$$b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + ... + b_{1N}v_N + W_1 = 0, \tag{3}$$

в котором $b_{j,i} = \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}$, а для r условных уравнений имеем

$$B_{r\times N}V_{N\times 1} + W_{r\times 1} = 0, \tag{4}$$

где $B_{r\times N} = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r1}\, b_{r2} \ldots b_{rN} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов условных уравнений,

$V_{N\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_N \end{pmatrix}$ – вектор поправок в измеряемые величины.

Это наши неизвестные, которые мы должны получить из r условных уравнений. Так как $r < N$, то система (2) или (4) недоопределена (уравнений меньше, чем неизвестных). Следовательно, решений множество. Из множества решений выбираем одно, которое обеспечивает $V^T PV = \min$.

$P_{N\times N} = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_N \end{pmatrix}$ – диагональная матрица весов независимых измеренных величин.

$W_{r\times 1} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_r \end{pmatrix}$ – вектор свободных членов условных уравнений.

Осуществляя обработку по МНК, перейдем к системе нормальных уравнений коррелат

$$B_{r\times N} \cdot P_{N\times N}^{-1} \cdot B_{N\times r}^{T} \cdot K_{r\times 1} + W_{r\times 1} = 0, \tag{5}$$

в котором количество коррелат (или неопределенных множителей Лагранжа) будет равно r, т.е. столько же, сколько нормальных уравнений. Корреляты вычисляют по формуле

$$K_{r\times 1} = -N_{r\times r}^{-1} W_{r\times 1}, \tag{6}$$

где $N_{r\times r} = B_{r\times N} \cdot P_{N\times N}^{-1} \cdot B_{N\times r}^{T}$.

Зная K можно получить поправки в результаты измерений по формуле

$$V_{N\times 1} = P_{N\times N}^{-1} \cdot B_{N\times r}^{T} \cdot K_{r\times 1}. \tag{7}$$

После нахождения уравненных значений результатов измерений находят уравненные координаты и выполняют оценку точности измеренных и уравненных величин по формулам

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{8}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}, \quad \frac{1}{P_F} = N_{ff} - N_f^T N_{r\times r}^{-1} N_f,$$

где $N_{ff} = f_{1\times N} P_{N\times N}^{-1} f_{N\times 1}^{T}$, $N_f = B_{r\times N} P_{N\times N}^{-1} f_{N\times 1}^{T}$, в которых используются коэффициенты весовой функции

нелинейный вид – $F = \varphi\left(y_1, ..., y_N\right)$, (9)

линейный вид – $F = f_0 + f_1 v_1 + ... + f_N v_N$, (10)

где $f_{1\times N} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_N \end{pmatrix}, \quad f_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}$.

Отсюда видно, что для оценки точности сторон, дирекционных углов и координат коэффициенты F будут соответствовать уравнению $\varphi(y)$ для условия сторон, условия дирекционных углов и условия координат.

Обратный вес функций можно получить и по формулам

$$\frac{1}{P_F} = N_{ff} - V_f^T P^{-1} V_f, \tag{11}$$

$$\frac{1}{P_F} = N_{ff} + f V_f, \tag{12}$$

где в (11) и (12) используется вектор

$$V_f = -P_{N\times N}^{-1} B_{N\times r}^{T} N_{r\times r}^{-1} N_f. \tag{13}$$

3. ВИДЫ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ И ПОДСЧЕТ ИХ ЧИСЛА

В плановых геодезических сетях возникают следующие условные уравнения:

– фигур;
– горизонта;
– полюса;
– базиса;
– дирекционных углов;
– координат;
– замыкающих линий.

Обычно количество условных уравнений подсчитывают по специальным формулам. Эти формулы зависят от метода построения сети (триангуляция, трилатерация, полигонометрия). Ниже рассмотрим правила поиска условных уравнений по схеме сети, которые легко запоминаются и позволяют назвать до 80 % уравнений из их числа *r*. Последним имеем в виду, что из правил есть исключения, и не всегда удается применить эти правила к любым по построениям геодезическим сетям.

Правила поиска независимых условных уравнений по схеме сети:

1. Число условий фигур равно количеству замкнутых фигур (треугольников, четырехугольников, многогранников) + число диагоналей. Под диагональю понимается такая сторона, которая пересекает другую сторону.
2. Число условий горизонта равно количеству пунктов, на которых замкнут горизонт. При уравнивании по направлениям (может быть еще уравнивание по углам) это условие не возникает.
3. Число условий полюса равно количеству центральных систем + число диагональных направлений.
4. Число условий базиса равно количеству избыточных базисных сторон (в полигонометрии не возникает).
5. Число условий дирекционных углов равно количеству избыточных измеренных или жестких дирекционных углов.
6. Число условий координат равно удвоенному числу (по X и по Y) жестких избыточных изолированных координатных систем.
7. Условие замыкающих может возникнуть в триангуляции и полигонометрии, что ниже будет подтверждено соответствующим примером.

Поясним на примерах геодезических сетей все названные правила, начиная с 6. На рис. 1 предложена геодезическая сеть триангуляции.

Согласно рис. 1, если исходные пункты 1 и 2, условие координат не возникает, и так как этими двумя пунктами (как и любыми двумя другими пунктами) определяется однозначно ориентировка, масштаб и положение сети, то такое построение называют свободной геодезической сетью.

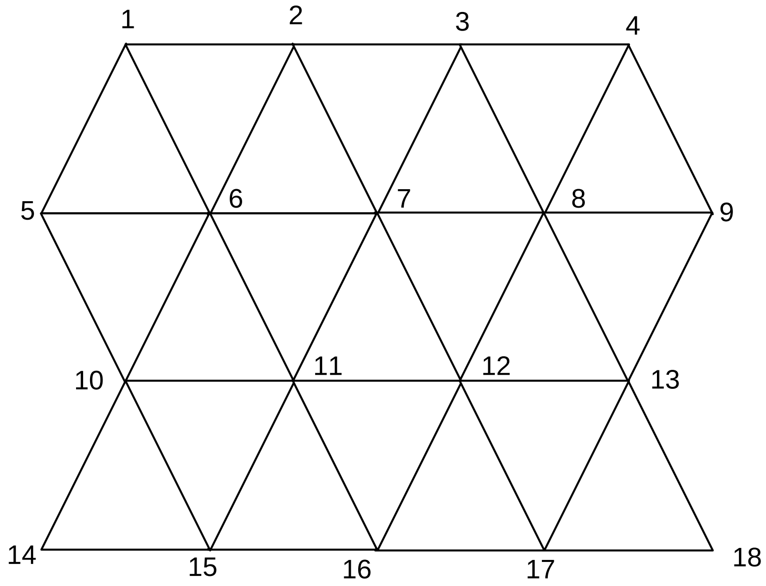


Рис. 1. Сеть триангуляции

Если дополнительный исходный пункт, кроме 1 и 2 имеет номер 18, то сеть несвободная и в ней возникает два условия координат по X и Y. Столько же будет условий координат, если исходные пункты будут:

а) 1, 2, 17, 18; б) 1, 2, 16, 17, 18; в) 1, 2, 3, 16, 17, 18.

Так как исходные пункты 1 и 2 определяют одну независимую координатную систему, то 1, 2, 3 тоже одна координатная система, аналогично 1, 2, 5 или 1, 2, 5, 10, или 1, 2, 3, 5, 10. Если исходные пункты изолированы от первой координатной системы, то возникают избыточные координатные системы. Например, на рис. 1 исходные пункты 1, 2, 4, 18, 16, 14, и так как мы имеем 5 изолированных координатных систем, то согласно правилу возникнут 8 условий координат.

Приведем примеры:

а) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 18, 16, 14 – 8 условий координат;

б) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 17, 18, 16, 14 – 6 условий координат;

в) исходные пункты 1, 2, 4, 9, 13, 18, 16, 14 – 6 условий координат;

г) исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 13, 18, 16, 14 – 4 условия координат;

д) исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 17, 13, 16, 15, 14 – нет условий координат, и сеть называется несвободной.

Если исходные пункты 1, 2 и возникает «окно» в триангуляции или полигонометрии, например, на рис. 1 отсутствует сторона 7 – 12, то возникает дополнительно 2 условия координат.

На рис. 2 приведена геодезическая сеть полигонометрии.

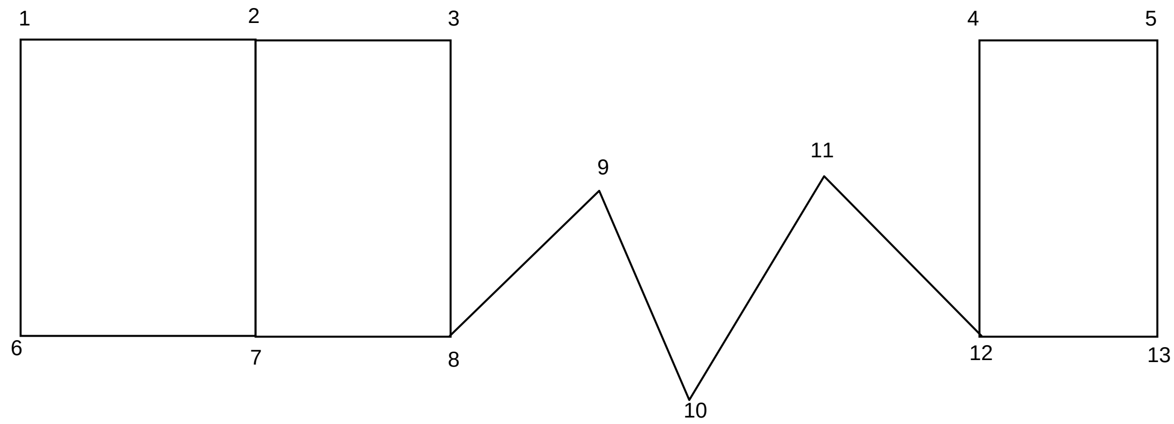


Рис. 2. Сеть полигонометрии

Чтобы сеть полигонометрии была свободной, необходимо знать координаты любых 2-х пунктов сети.

Рассмотрим подсчет числа условий координат в полигонометрии:

а) исходные пункты 1 и 2 – так как мы имеем три замкнутых полигона, то здесь 6 условий координат;

б) исходные пункты 1, 2, 5, 13 – так как остались три замкнутых полигона, и появилась одна изолированная координатная система, то возникает 8 условий координат;

в) исходные пункты 1, 6, 3, 8, 10, 5, 13 – 12 условий координат (три полигона + три изолированных системы координат).

Поясним на примерах подсчет числа условий фигур. Количество условий фигур на рис. 1 равно 21, а на рис. 2 – 3 условия фигур.

Поясним условие горизонта для сети на рис. 1. Возникают 5 условий горизонта для пунктов с номерами 6, 7, 8, 11, 12. Если бы на рис. 2 был бы измерен внешний угол $\angle 987$, замыкающий горизонт, то число условий горизонта 1.

Поясним условие полюса: на рисунке 1 возникает 5 условий полюса на пунктах 6, 7, 8, 11, 12 и ни одного условия полюса на рис. 2.

На рис. 3 показан геодезический четырехугольник. В нем возникает 4 условных уравнения: 8 измеренных углов (N = 8) и 2 определяемых пункта (t = 4); r = 4. Если временно убрать диагональ 2 – 4, то останутся 2 независимых условия фигур. Возникает условие фигур в

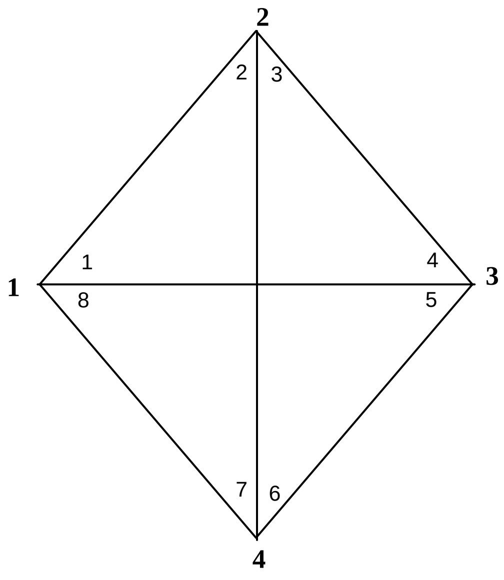


Рис. 3. Геодезический четырехугольник

треугольниках Δ123 и Δ134. Диагональ 2 – 4 влечет еще одно независимое условное уравнение фигур или в треугольнике Δ124, или в треугольнике Δ234. Согласно правилу 3 диагональ влечет одно условие полюса. Следовательно, для сети на рис. 3 мы имеем четыре независимых условных уравнений: 3 – фигуры и 1 – полюса.

Из этого простого примера следует простое правило: диагональ в геодезической сети влечет одно условие фигур и одно условие полюса.

Применим это правило для сети, показанной на рис. 4. В этой сети $N = 15$, $t = 6$ и возникает $r = 9$ условий.

В том числе 6 условий фигур и 3 условия полюса. Подсчитать по правилам это можно следующим образом: зрительно уберем 3 диагонали 2 – 5, 2 – 4 и 3 – 5, в результате останутся 3 треугольника Δ123; Δ134; Δ145. К этим трем условиям фигур подключатся три условия фигур и три условия полюса по числу диагоналей.

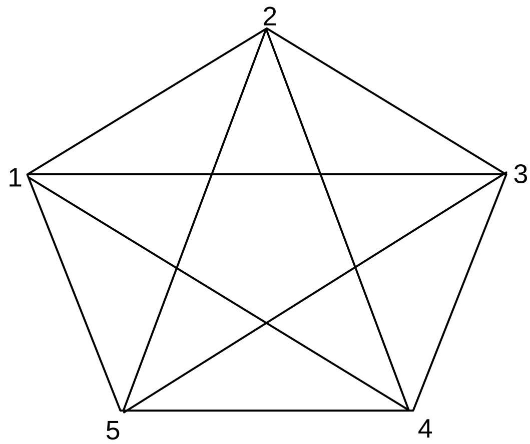


Рис. 4. Сеть пятиугольника

На примере рис. 1 выполним поиск условий базиса и дирекционных углов:

а) исходные пункты 1, 2, 17, 18 – одно условие базиса и одно условие дирекционных углов;

б) исходные пункты 1, 2, 4, 8, 13 – два условия базиса и два условия дирекционного угла;

в) исходные пункты 1, 2, 3, 4, 9, 13, 17, 16, 15, 14 – восемь условий базиса и восемь условий дирекционного угла;

г) исходные пункты 1, 2 и измеренные стороны 7 – 11, 8 – 12 возникает два условия сторон, и нет условий дирекционных углов.

Аналогично ведется подсчет для числа измеренных азимутов (дирекционных углов).

Например, исходные пункты 1, 2 и измеренные три дирекционных угла (14 – 15, 15 – 16, 4 – 9) – три условия дирекционных углов.

В сети на рис. 2 с исходными пунктами 1, 2, 5, 13 возникает 12 независимых условных уравнений (N = 30 – 17 углов и 13 сторон, t = 18 при числе определяемых пунктов 9). В итоге имеем: три условия фигур (3 замкнутых полигона), одно условие дирекционных углов между двумя исходными сторонами 1 – 2 и 5 – 13 и 8 условий координат (из них 6 условий координат в полигонах и два условия для изолированной координатной системы 5 – 13).

Закрепим эти правила, определяя независимые условные уравнения для рис. 5.

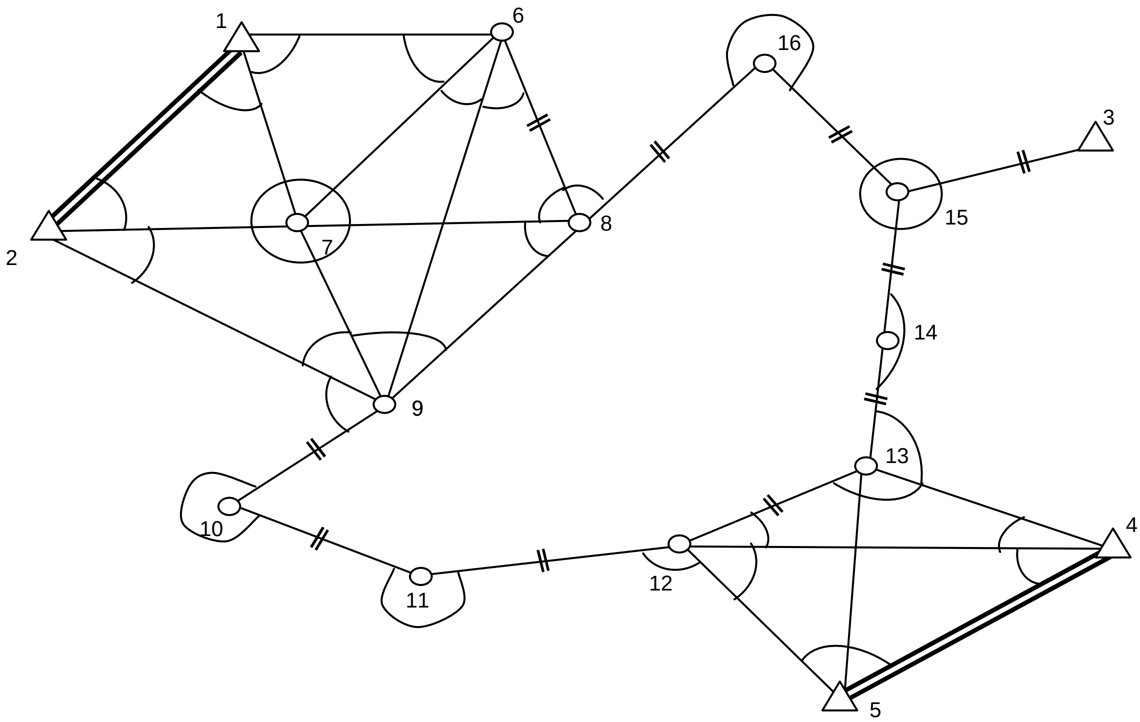


Рис. 5. Схема сети

36 углов

10 сторон

$N = 46$

$t = 22$ (11 определяемых пунктов)

$r = 24$

– число фигур – 10 (Δ167; Δ172; Δ678; Δ789; Δ279; Δ679; Δ12 13 4; Δ12 5 4; Δ12 13 5; и полигон 8, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8);

– число горизонта – 2 (на пунктах 7 и 15);

– число полюса – 3 (центральная система 7 и две диагонали 6 – 9 и 5 – 13);

– число условий сторон – 2 (для измеренных сторон 6 – 8 и 12 – 13);

– число условий дирекционных углов – 1 (исходный дирекционный угол 1 – 2, избыточный исходный дирекционный угол 4 – 5);

– число условий координат – 6 (2 изолированные избыточные координатные системы, исходный пункт 3 и исходные пункты 4, 5, а также «окно» 8, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8).

4. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИГУР

В любой замкнутой фигуре на плоскости сумма измеренных углов должна быть равна $180°(n - 2)$, где n – число вершин (сторон) в фигуре (см. рис. 6а). Для рис. 6б, при использовании внешних углов имеем $180°(n + 2)$.

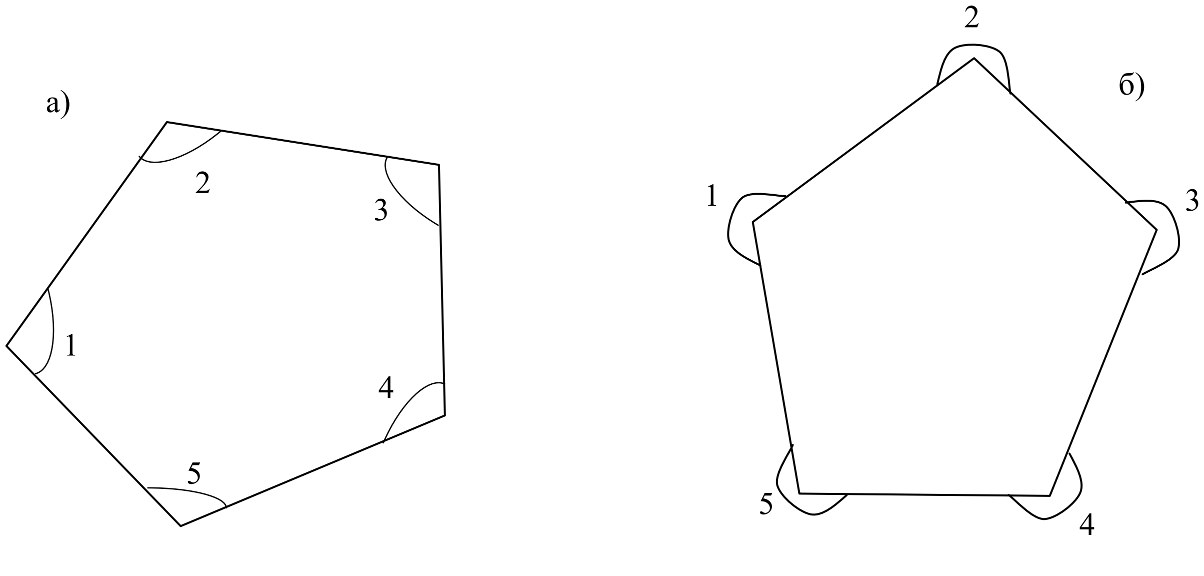


Рис. 6. Замкнутые фигуры

Для фигуры, показанной на рис. 6а, мы имеем следующее уравнение связи

$$\varphi(y) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 - 540°$$

Переходя к условному уравнению фигур, согласно формуле (2) имеем

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w = 0$$

Аналогичным будет условие уравнения фигур для сети рис. 6б.

Перейдем к геодезическому четырехугольнику, показанному на рис. 3. Для него можно составить следующие условные уравнения фигур:

$$\begin{aligned}
&a)\ v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + w_1 = 0;\\
&b)\ v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0;\\
&c)\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_3 = 0;\\
&d)\ v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_4 = 0;\\
&e)\ v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + w_5 = 0;\\
&f)\ v_3 + v_4 - v_7 - v_8 + w_6 = 0;\\
&g)\ \sum_{i=1}^{8} v_i + w_7 = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Но в обработку берутся только три из перечисленных независимых условных уравнений. Приведем примеры: если в обработку приняты условные уравнения фигур а), b), c), то условия d) – g) будут зависимыми, так для d) имеем d = a + b – c;

для e) получим e = c – b;

для f) получим f = b – d.

Если в обработку будут взяты зависимые условные уравнения, то матрица нормальных уравнений коррелат будет вырожденной, то есть ее определитель det = 0.

Выше мы рассмотрели типовые фигуры с измеренными углами, покажем, что условные уравнения фигур могут возникнуть в трилатерации. Например, если в четырехугольнике на рис. 3 будут измерены стороны 2 – 3, 2 – 4, 1 – 3, 3 – 4, то $N = 5$, $t = 4$, $r = 1$. Условное уравнение фигур можно записать так же как (14а), но поправки в углы выражаются через поправки в измеренные стороны с помощью дифференциальной формулы Бутлера, которая будет рассмотрена ниже.

5. УСЛОВИЯ ГОРИЗОНТА

Возникают на тех пунктах геодезической сети, где замкнут горизонт (рис. 7).

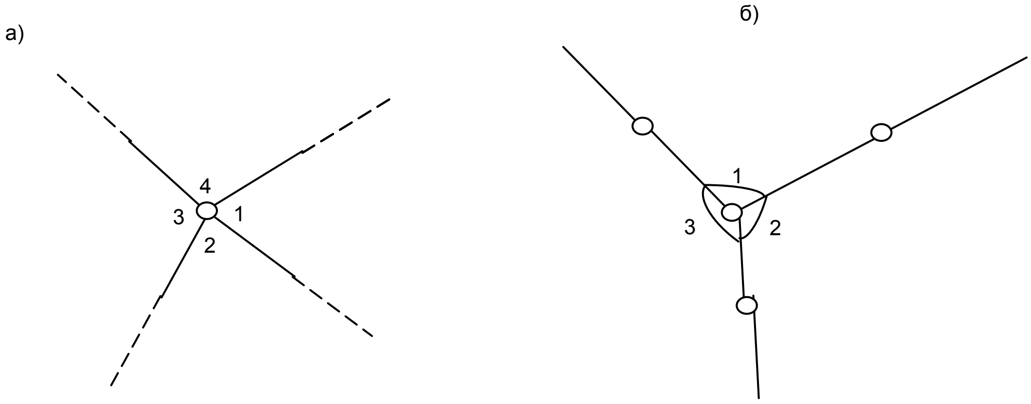


Рис. 7. Фрагменты геодезических сетей

Условные уравнения связи для фрагмента 7а имеют вид

$$\varphi(y) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 - 360^\circ$$

а условное уравнение будет линейным

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w = 0$$

Для рис. 7б имеем $v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$

На рис. 8 приведена сеть трилатерации

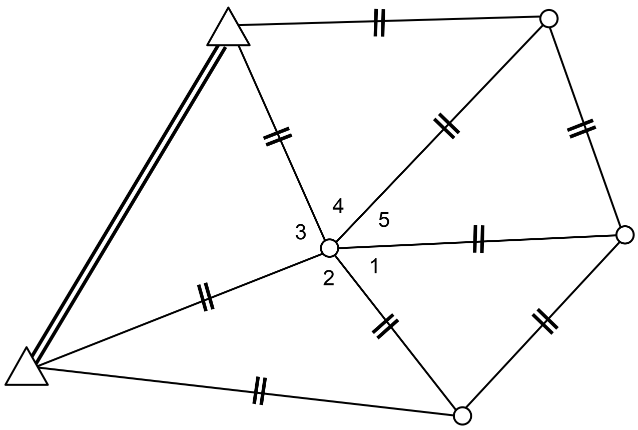


Рис. 8. Сеть трилатерации

Возьмем центральную систему трилатерации. Здесь измерено 9 сторон $r = 9 - 8 = 1$ условное уравнение горизонта в виде

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w = 0, \qquad (15)$$

где v – поправки в углы, полученные по трем сторонам в каждом треугольнике. При этом v_β выражается через v_S по формуле Бутлера.

6. УСЛОВИЯ СУММ ИЛИ РАЗНОСТИ УГЛОВ

На практике возникают случаи, когда два соседних угла составляют третий угол (рис. 9).

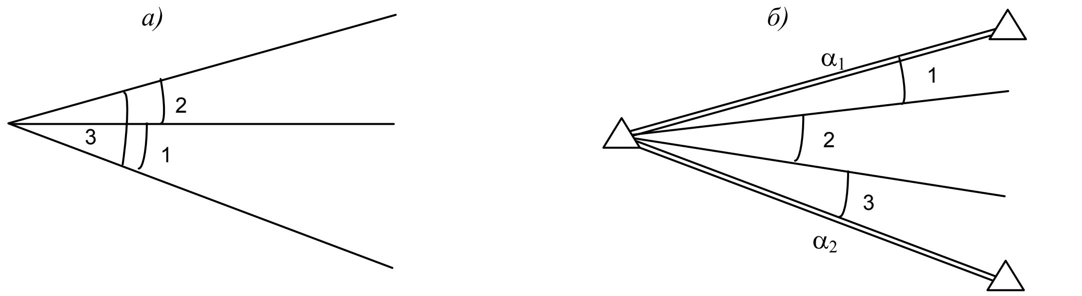


Рис. 9. Фрагменты геодезической сети

Уравнение связи для рис. 9а будет таким

$$\varphi(y) = \angle 3 - \angle 2 - \angle 1$$

Линейное условное уравнение имеет вид $v_3 - v_1 - v_2 + w = 0$,

где $w = \angle 3 - \angle 1 - \angle 2$

На рис. 9б показаны углы, измеренные между двумя жесткими сторонами. Свободный член условного уравнения примет вид $w = \angle 1 + \angle 2 + + \angle 3 - (\alpha_2 - \alpha_1)$.

Условное уравнение сумм углов будет таким:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0;$$

если α_2 и α_1 измерены гиротеодолитом или из астрономических наблюдений с переходом от азимутов к дирекционным углам, то

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_{\alpha 2} - v_{\alpha 1} + w = 0.$$

7. УСЛОВИЕ ДИРЕКЦИОННЫХ УГЛОВ

Данное условие может возникать во всех видах геодезических построений (триангуляции, полигонометрии, трилатерации). Рассмотрим данное условие для примера триангуляции (рис. 10).

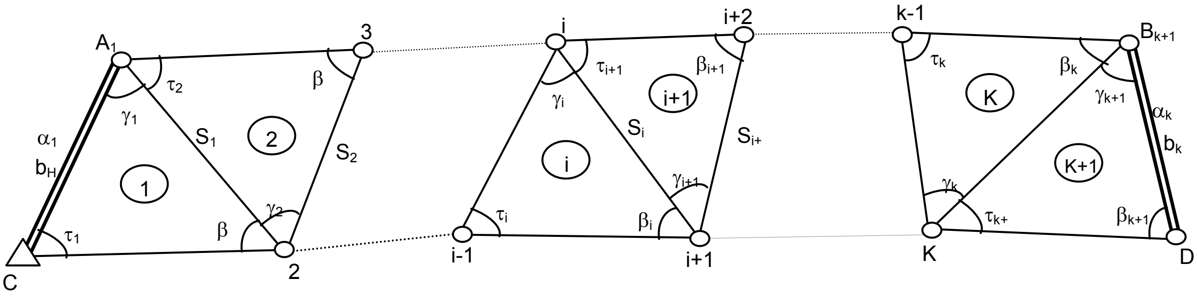


Рис. 10. Звено триангуляции

На рис. 10 углы β_i, τ_i – участвующие при передаче сторон по теореме синусов, называются связующие, а γ_i – промежуточные. С помощью последних можно записать

$$\varphi(y) = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2 - ... - \gamma_{k+1} - \alpha_k, \tag{16}$$

дифференцируя которое получим условное уравнение дирекционного угла

$$v_{\alpha_H} - v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - ... - v_{\gamma_{K+1}} - v_{\alpha_K} + W = 0$$

или, если α_H, α_K жесткие

$$-v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - ... - v_{\gamma_{K+1}} + W = 0\,, \tag{17}$$

где W – свободный член условного уравнения, получаемый по (16).

Ошибки не произойдет, если вместо (17) записать

$$v_{\tau_1} + v_{\beta_1} - v_{\tau_2} - v_{\beta 2} + ... + v_{\tau_{K+1}} + v_{\beta_{K+1}} + W_n = 0\,, \tag{18}$$

однако равенство (17) проще (18).

Рассмотрим условие дирекционных углов для хода полигонометрии (рис.11).

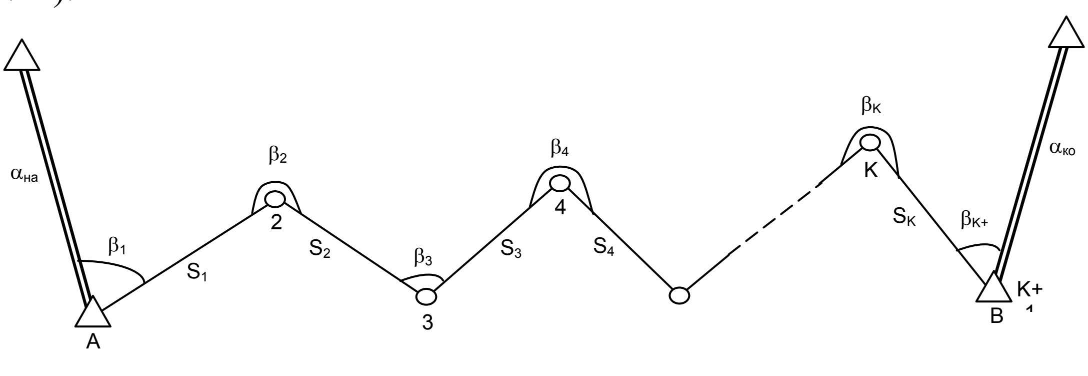


Рис. 11. Сеть полигонометрии

Уравнение связи для условия дирекционного угла будет таким

$$\varphi(\beta)=\sum_{i=1}^{K+1}-\left(\alpha_{кон.}-\alpha_{нач.}+K\cdot 180^{\circ}\right), \qquad (19)$$

где $K+1$ – число измеренных углов.

Условное уравнение дирекционного угла, считая $\alpha_{кон.}$ и $\alpha_{нач.}$ твердыми, будет иметь вид

$$v_1+v_2+...+v_{k+1}+w=0,$$

если $\alpha_{кон.}$ и $\alpha_{нач.}$ измеренные величины, то

$$v_1+v_2+...+v_{K+1}+v_{\alpha_{нач.}}-v_{\alpha_{кон.}}+W_n=0\,. \qquad (20)$$

Если построено звено трилатерации, состоящее из $K+1$ треугольников, (см. рис. 10), то $N=2K+1$, а $t=2K$, следовательно, $r=1$, и условие дирекционных углов примет вид (17), с применением формулы (16) для измеренных углов, вычисленных по трем сторонам треугольника трилатерации. Как перейти от v_γ к v_S будет сказано ниже.

8. УСЛОВИЕ СТОРОН (БАЗИСОВ)

Условие сторон возникает только в звене триангуляции (в звене полигонометрии его не существует, а в звене трилатерации – заменяется на условие дирекционных углов, как наиболее простое).

Для звена, показанного на рис. 10, можно записать свободный член условия сторон

$$W_b = b_{кон.}^{выч.} - b_{кон.}^{изм.} = \frac{b_{\text{Н}}^{изм.} \sin\tau_1 \sin\tau_2 ... \sin\tau_i ... \sin\tau_{K+1}}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 ... \sin\beta_i ... \sin\beta_{K+1}} - b_{кон.}^{изм.}, \qquad (21)$$

полученный, начиная с первого по $K + 1$ треугольник, с использованием теоремы синусов. Для нахождения dW возьмем производные функции $\varphi(y)$ (см. формулу (21)) по измеренным величинам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_H} = \frac{\sin\tau_1 ... \sin\tau_{K+1}}{\sin\beta_1 ... \sin\beta_{K+1}} \cdot \frac{b_H^{изм.}}{b_H^{изм.}} = \frac{b_{кон.}^{выч.}}{b_H^{изм.}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_{кон.}} = -1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = \frac{b_H^{изм.} \cos\tau_1 \sin\tau_2 ... \sin\tau_{\text{K}+1}}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 ... \sin\beta_{\text{K}+1}} \cdot \frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_1} = b_{кон.}^{выч.} \frac{\cos\tau_1}{\sin\tau_1} = b_{кон.}^{выч.} \text{ctg}\tau_1;$$

без вывода по аналогии с предыдущим равенством получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i} = b_{кон.}^{выч.} \text{ctg}\tau_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} = \frac{b_H^{изм.} \cdot \sin\tau_1 \sin\tau_2 ... \sin\tau_{K+1}}{\sin\beta_2 ... \sin\beta_{K+1}} \cdot \frac{-\cos\beta_1}{\sin^2\beta_1} = -b_{кон.}^{выч.} \text{ctg}\beta_1;$$

без вывода по аналогии с предыдущим равенством получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} = -b_{кон.}^{выч.} \cdot \text{ctg}\beta_i;$$

с учетом частных производных можно записать

$$dW = b_{кон.}^{выч.} \sum_{i=1}^{K+1} \left(\text{ctg}\tau_i d\tau_i - \text{ctg}\beta_i d\beta_i\right) + \frac{b_{кон.}^{выч.}}{b_H^{изм.}} db_H - db_{кон.},$$

переходя от дифференциалов к поправкам и умножая предыдущее равенство на $\rho'' / b_{кон.}^{выч.}$, аналогично запишем:

$$\sum_{i=1}^{K+1}\left(\operatorname{ctg}\tau_i v''_{\tau_i} - \operatorname{ctg}\beta_i v''_{\beta_i}\right) + \frac{\rho''}{b_H} v''_{b_H} - \frac{\rho''}{b_{кон.}} v''_{b_{кон.}} + W''_b = 0, \tag{22}$$

и

$$W''_b = \frac{b^{выч.}_{кон.} - b^{изм.}_{кон.}}{b^{выч.}_{кон.}} \cdot \rho''. \tag{23}$$

Если $b_{нач.}$ и $b_{кон.}$ базисы, то $v_{b_H} = v_{b_{кон.}} = 0$, условное уравнение базиса примет вид:

$$\sum_{i=1}^{K+1}\left(\operatorname{ctg}\tau_i v''_{\tau_i} - \operatorname{ctg}\beta_i v''_{\beta_i}\right) + W''_b = 0, \tag{24}$$

9. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЮСА

Данное условие возникает в центральных системах и в геодезических построениях, где имеются диагональные направления. На рис. 12 показана центральная система.

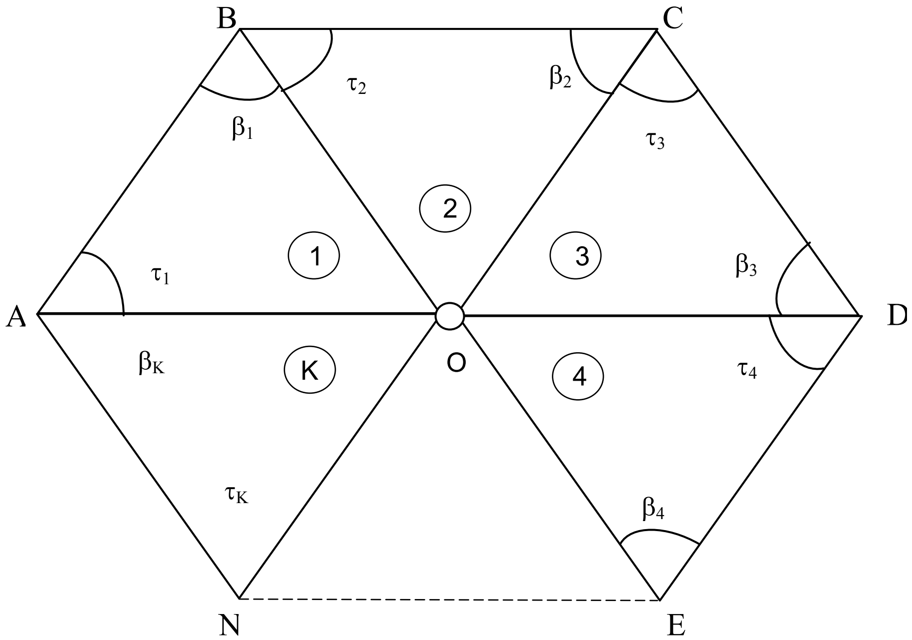


Рис. 12. Центральная система

В ней возникает условие полюса в точке O. На рис. 13 приведен геодезический четырехугольник, для которого можно записать 5 условий полюса в вершинах O, A, B, C, D.

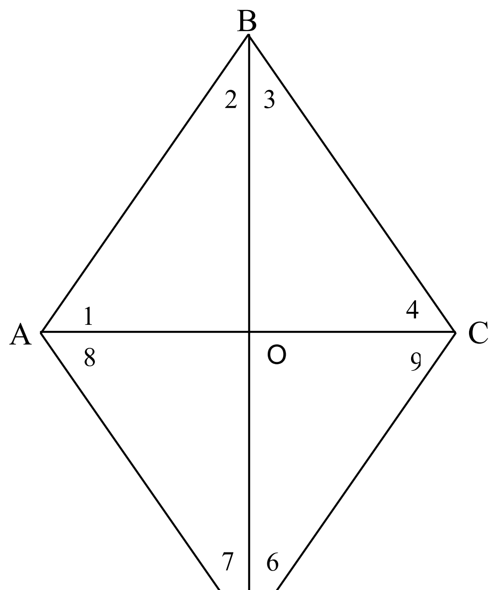


Рис. 13. Геодезический четырехугольник

На рис. 14 показан веер, для которого можно записать одно условие полюса (так как имеется одна диагональ) для вершины O.

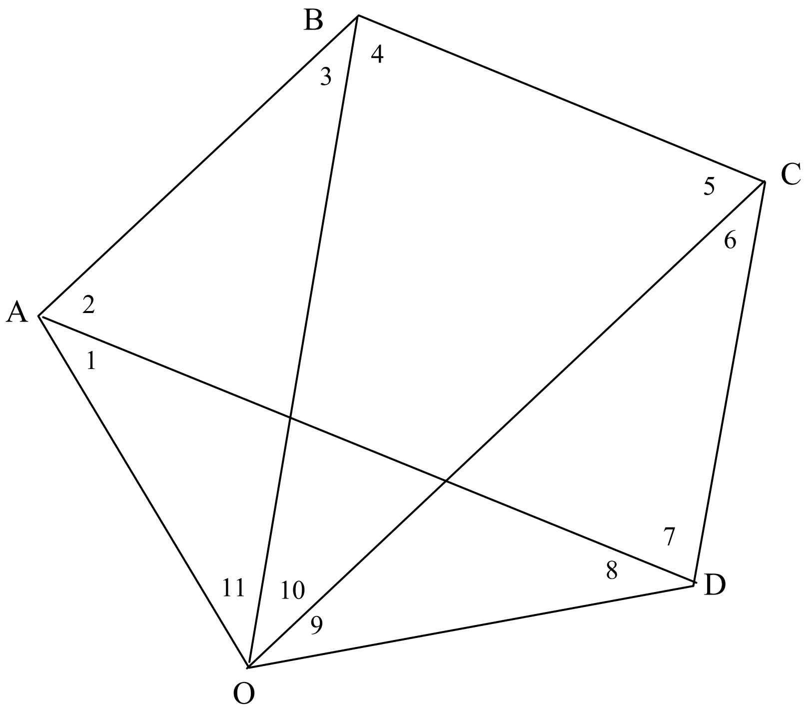


Рис. 14. Веер

На рис. 15 показана центральная система, для которой полюс можно записать в вершинах O, A, B, C.

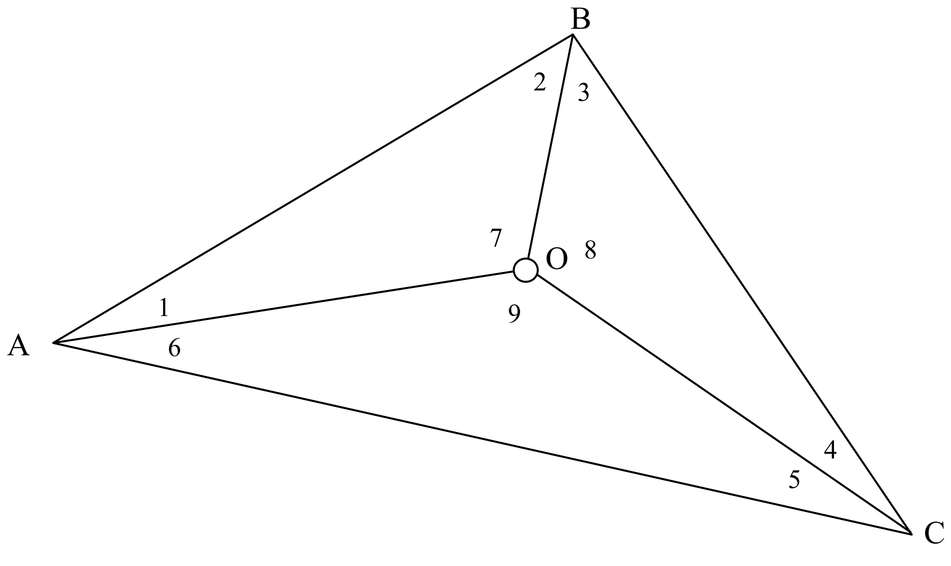


Рис. 15. Центральная система

Выведем условное уравнение полюса для центральной системы, показанной на рис. 12.

Для записи уравнения связи возьмем сторону S между пунктами О и А. Получим

$$W = S\frac{\sin\tau_1 ....\sin\tau_K}{\sin\beta_1 ....\sin\beta_K} - S = S\left(\frac{\sin\tau_1 ....\sin\tau_K}{\sin\beta_1 ....\sin\beta_K} - 1\right). \qquad (25)$$

Найдем ∂W, т.е. $\partial\varphi/\partial\tau_1$, $\partial\varphi/\partial\tau_K$, $\partial\varphi/\partial\beta_1$, $\partial\varphi/\partial\beta_K$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = S\frac{\cos\tau_1\sin\tau_2 ...\sin\tau_K}{\sin\beta_1\sin\beta_2 ...\sin\beta_K}\cdot\frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_1} = S\cdot\mathrm{ctg}\tau_1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i} = S\cdot\mathrm{ctg}\tau_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} = S\frac{\sin\tau_1\sin\tau_2 ...\sin\tau_K}{\sin\beta_2 ...\sin\beta_K}\cdot\left(-\frac{\cos\beta_1}{\sin^2\beta_1}\right) = -S\cdot\mathrm{ctg}\beta_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} = -S\cdot\mathrm{ctg}\beta_i;$$

$$dW = S\sum_{i=1}^{K}\left(\mathrm{ctg}\tau_i d\tau_i - \mathrm{ctg}\beta_i d\beta_i\right). \qquad (26)$$

Тогда $dW + W = 0$ с переходом от дифференциалов к поправкам примет вид

$$S\sum_{i=1}^{K}\left(\mathrm{ctg}\tau_i v_{\tau_i} - \mathrm{ctg}\beta_i v_{\beta_i}\right) + S\left(\frac{\sin\tau_1 ....\sin\tau_K}{\sin\beta_1 ....\sin\beta_K} - 1\right) = 0$$

умножая это уравнение на ρ''/S, окончательно получим

$$\sum_{i=1}^{K}\left(\mathrm{ctg}r_i v''_{\tau_i} - \mathrm{ctg}\beta''_i v_{\beta_i}\right) + \rho''\left(\frac{\sin\tau_1 ....\sin\tau_K}{\sin\beta_1 ....\sin\beta_K} - 1\right) = 0 \qquad (27)$$

Основной трудностью при записи условного уравнения полюса является правильное написание условного уравнения связи вида (25).

Запишем все четыре условных уравнения связи для центральной системы (рис. 15).

Полюс в точке О

Углы τ и δ можно найти с помощью матрицы связи (рис. 16), для которой в верхней строке указываем названия вершин по ходу часовой стрелки

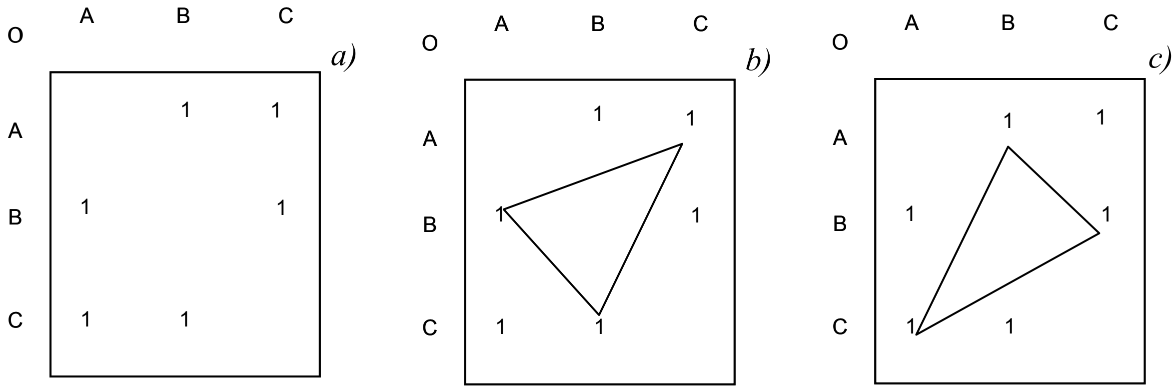


Рис. 16. Матрица связи

Заполняем левый первый столбец.

На рис. 16*b* показан верхний треугольник для углов числителя, а на рис. 16*c* показан нижний треугольник для углов знаменателя. Затем пишем заготовку

$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA \cdot OB \cdot OC}, \tag{28}$$

в которую вписываем вершину угла в соответствии со связью, указанной на рисунках 16*b* и 16*c*. Например, для заготовки ОА мы приписываем вершину С, так как единичка стоит в первой строке 3 столбца. В знаменателе для заготовки ОА пишем В в соответствии с 1-ой в первой строке 2-го столбца (см. рис. 16*c*).

Аналогично, пользуясь, рис. 16*b* и 16*c*, окончательно, вместо (28) запишем

$$\frac{\angle OAC \cdot \angle OBA \cdot \angle OCB}{\angle OAB \cdot \angle OBC \cdot \angle OCA} = \frac{\angle 6 \cdot \angle 2 \cdot \angle 4}{\angle 1 \cdot \angle 3 \cdot \angle 5}. \tag{29}$$

Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W'' = \rho'' \left(\frac{\sin 6 \cdot \sin 2 \cdot \sin 4}{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5} - 1 \right).$$

Условные уравнения полюса для точки О (см. рис. 15)

$$\mathrm{ctg}6 v_6 + \mathrm{ctg}2 v_2 + \mathrm{ctg}4 v_4 - \mathrm{ctg}1 v_1 - \mathrm{ctg}3 v_3 - \mathrm{ctg}5 v_5 + W = 0$$

Для последующих примеров будем приводить рис. 1в, аналогичный 16а и углы числителя и знаменателя аналогично (29).

Для полюса в точке А (рис. 15) заготовка

A	B	O	C
B		1	1
O	1		1
C	1	1	

$$\frac{AB\cdot AO\cdot AC}{AB\cdot AO\cdot AC};\ \text{углы}\ \frac{\angle ABC\cdot\angle AOB\cdot\angle ACO}{\angle ABO\cdot\angle AOC\cdot\angle ACB}=\frac{\angle(2+3)\cdot\angle 7\cdot\angle 5}{\angle 2\cdot\angle 9\cdot\angle(5+4)};$$

Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W''=\rho''\left(\frac{\sin\angle(2+3)\cdot\sin\angle 7\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 9\cdot\sin\angle(5+4)}-1\right),$$

$$\operatorname{ctg}(2+3)v_2+\operatorname{ctg}(2+3)v_3+\operatorname{ctg}7v_7+\operatorname{ctg}5v_5-\operatorname{ctg}2v_2-$$
$$-\operatorname{ctg}9v_9-\operatorname{ctg}(5+4)v_5-\operatorname{ctg}(5+4)v_4+W=0$$

для полюса в точке В (см. рис. 15) заготовка

B	C	O	A
C		1	1
O	1		1
A	1	1	

$$\frac{BC\cdot BO\cdot BA}{BC\cdot BO\cdot BA};\ \text{углы}\ \frac{\angle BCA\cdot\angle BOC\cdot\angle BAO}{\angle BCO\cdot\angle BOA\cdot\angle BAC}=\frac{\angle(4+5)\cdot\angle 8\cdot\angle 1}{\angle 4\cdot\angle 7\cdot\angle(1+6)};$$

для полюса в точке С (см. рис. 15) заготовка

C	A	O	B
A		1	1
O	1		1
B	1	1	

$$\frac{CA\cdot CO\cdot CB}{CA\cdot CO\cdot CB}\text{; углы }\frac{\angle CAB\cdot\angle COA\cdot\angle CBO}{\angle CAO\cdot\angle COB\cdot\angle CBA}=\frac{\angle(1+6)\cdot\angle 9\cdot\angle 3}{\angle 6\cdot\angle 8\cdot\angle(2+3)};$$

Для геодезического четырехугольника (см. рис. 13) можно записать 5 условий полюса

для полюса в точке O (см. рис. 13) заготовка

O	A	B	C	D
A		1		1
B	1		1	
C		1		1
D	1		1	

$$\frac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}\text{; углы }\frac{\angle OAD\cdot\angle OBA\cdot\angle OCB\cdot\angle ODC}{\angle OAB\cdot\angle OBC\cdot\angle OCD\cdot\angle ODA}=\frac{\angle 8\cdot\angle 2\cdot\angle 4\cdot\angle 6}{\angle 1\cdot\angle 3\cdot\angle 5\cdot\angle 7};$$

Зная углы числителя и знаменателя, запишем

$$W''=\rho''\left(\frac{\sin\angle 8\cdot\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 7}-1\right),$$

$$\mathrm{ctg}8v_8+\mathrm{ctg}2v_2+\mathrm{ctg}4\nu_4+\mathrm{ctg}6v_6-\mathrm{ctg}1v_1-\mathrm{ctg}3v_3-\mathrm{ctg}5v_5-\mathrm{ctg}7v_7+W=0$$

для полюса в точке А (см. рис. 13) заготовка

A	B	C	D
B		1	1
C	1		1
D	1	1	

$$\frac{AB\cdot AC\cdot AD}{AB\cdot AC\cdot AD};\quad \text{углы}\quad \frac{\angle ABD\cdot\angle ACB\cdot\angle ADC}{\angle ABC\cdot\angle ACD\cdot\angle ADB}=\frac{\angle 2\cdot\angle 4\cdot\angle(6+7)}{\angle(2+3)\cdot\angle 5\cdot\angle 7};$$

$$W''=\rho''\left(\frac{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle(6+7)}{\sin\angle(2+3)\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 7}-1\right),$$

$$\mathrm{ctg}2v_2+\mathrm{ctg}4v_4+\mathrm{ctg}(6+7)\nu_6+\mathrm{ctg}(6+7)v_7-$$
$$-\mathrm{ctg}(2+3)v_2-\mathrm{ctg}(2+3)v_3-\mathrm{ctg}5v_5-\mathrm{ctg}7v_7+W=0$$

для полюса в точке В (см. рис. 13) заготовка

B	C	D	A
C		1	1
D	1		1
A	1	1	

$$\frac{BC \cdot BD \cdot BA}{BC \cdot BD \cdot BA}\text{; углы } \frac{\angle BCA \cdot \angle BDC \cdot \angle BAD}{\angle BCD \cdot \angle BDA \cdot \angle BAC} = \frac{\angle 4 \cdot \angle 6 \cdot \angle (1+8)}{\angle (4+5) \cdot \angle 7 \cdot \angle 1};$$

для полюса в точке C (см. рис. 13) заготовка

C	D	A	B
D		1	1
A	1		1
B	1	1	

$$\frac{CD \cdot CA \cdot CB}{CD \cdot CA \cdot CB}\text{; углы } \frac{\angle CDB \cdot \angle CAD \cdot \angle CBA}{\angle CDA \cdot \angle CAB \cdot \angle CBD} = \frac{\angle 6 \cdot \angle 8 \cdot \angle (2+3)}{\angle (6+7) \cdot \angle 1 \cdot \angle 3};$$

для полюса в точке D (см. рис. 13) заготовка

D	A	B	C
A		1	1
B	1		1
C	1	1	

$$\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA \cdot DB \cdot DC}\text{; углы } \frac{\angle DAC \cdot \angle DBA \cdot \angle DCB}{\angle DAB \cdot \angle DBC \cdot \angle DCA} = \frac{\angle 8 \cdot \angle 2 \cdot \angle (4+5)}{\angle (1+8) \cdot \angle 3 \cdot \angle 5};$$

Для веера (см. рис. 14) возникает одно условие полюса.

для полюса в точке O (рис. 14) заготовка

O	A	B	C	D
A		1		1
B	1		1	
C		1		1
D	1		1	

$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}{OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}\text{; углы}$$

$$\frac{\angle OAD \cdot \angle OBC \cdot \angle OCB \cdot \angle ODC}{\angle OAB \cdot \angle OBC \cdot \angle OCD \cdot \angle ODA} = \frac{\angle 1 \cdot \angle 3 \cdot \angle 5 \cdot \angle (7+8)}{\angle (1+2) \cdot \angle 4 \cdot \angle 6 \cdot \angle 8};$$

Условное уравнение запишется в таком виде

$$W'' = \rho'' \left(\frac{\sin \angle 1 \cdot \sin \angle 3 \cdot \sin \angle 5 \cdot \sin \angle (7+8)}{\sin \angle (1+2) \cdot \sin \angle 4 \cdot \sin \angle 6 \cdot \sin \angle 8} - 1 \right),$$

$$\mathrm{ctg}1 v_1 + \mathrm{ctg}3 v_3 + \mathrm{ctg}5 v_5 + \mathrm{ctg}(7+8) v_7 + \mathrm{ctg}(7+8) v_8 -$$

$$-\mathrm{ctg}(1+2) v_1 - \mathrm{ctg}(1+2) v_2 - \mathrm{ctg}4 v_4 - \mathrm{ctg}6 v_6 - \mathrm{ctg}8 v_8 + W = 0$$

10. УСЛОВИЯ КООРДИНАТ В ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Для определения положения пунктов геодезической сети достаточно знать координаты двух пунктов, чтобы геодезическим способом передать координаты на все остальные пункты сети. При наличии в сети дополнительных исходных пунктов необходимо согласование всех измерений с координатами заданных пунктов. Математические выражения этих требований называются условиями координат, подразделяющиеся на условия абсцисс и ординат.

Рассмотрим составления этих условных уравнений для сетей полигонометрии.

Для вывода формул обратимся к рис. 11.

Координаты исходного пункта В можно получить, передавая приращение координат от точки А.

$$X_B^{выч.} = X_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} \Delta X_i = X_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} S_i \cos\alpha_i \,;$$

$$Y_B^{выч.} = Y_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} \Delta Y_i = Y_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i \,;$$

Свободные члены условия координат вычисляются по следующим выражениям

$$W_X = X_B^{выч.} - X_B^{исх.}; \qquad W_Y = Y_B^{выч.} - Y_B^{исх.};$$

дифференцируя которые, найдем

$$dW_X = \sum_{i=1}^{K} d(S_i \cos\alpha_i) = \sum_{i=1}^{K} dS_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{K} S_i(-\sin\alpha_i)d\alpha_i \,.$$

Переходя от дифференциалов к поправкам, получим условия абсцисс

$$\sum_{i=1}^{K} V_{S_i} \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i \frac{V''_{\alpha_i}}{\rho''} + W_X = 0\,, \tag{30}$$

которое было бы окончательным, если бы в полигонометрии измерялись дирекционные углы. Но так как $\alpha_i = \alpha_{исх.} + \sum_{j=1}^{i} \beta_j - i \cdot 180^\circ$, получим V_α через V_β и подставим его в (30). Очевидно, что $V_{\alpha_1} = V_{\beta_1}$;

$$V_{\alpha_2} = V_{\beta_1} + V_{\beta_2}\,;$$

$$V_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{K} V_{\beta_i}\,,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} = \Delta y_1 V_{\alpha_1} + \Delta y_2 V_{\alpha_2} + \ldots + \Delta y_K V_{\alpha_K} =$$
$$= \Delta y_1 V_{\beta_i} + \Delta y_2 V_{\beta_1} + \Delta y_2 V_{\beta_2} + \Delta y_3 V_{\beta_1} + \Delta y_3 V_{\beta_2} + \Delta y_3 V_{\beta_3} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$+\Delta y_K V_{\beta_1} + \Delta y_K V_{\beta_2} + \Delta y_K V_{\beta_3} + \ldots + \Delta y_K V_{\beta_K} =$$
$$= \left(y_{K+1} - y_1\right) V_{\beta_1} + \left(y_{K+1} - y_2\right) V_{\beta_2} + \left(y_{K+1} - y_3\right) V_{\beta_3} + \ldots. + \left(y_{K+1} - y_K\right) V_{\beta_K}$$

так как

$$\left(y_{K+1} - y_1\right) = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_K$$

$$\left(y_{K+1} - y_2\right) = \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_K$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(y_{K+1} - y_K\right) = \Delta y_K$$

Суммируя итоговое выражение, получим

$$\sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{K} \left(y_{K+1} - y_i\right) \frac{V''_{\beta_i}}{\rho''},$$

подставляя которое в (30) окончательно для условия абсцисс запишем

$$\sum_{i=1}^{K} V_{S_i} \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{K} \left(Y_{K+1} - Y_i\right) \frac{V''_{\beta''}}{\rho''} + W_X = 0 .$$

Условие ординат по аналогии с условием абсцисс будет таким

$$\sum_{i=1}^{K} V_{S_i} \sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{K} \left(X_{K+1} - X_i\right) \frac{V_{\beta''}}{\rho''} + W_Y = 0 .$$

11. УСЛОВИЯ КООРДИНАТ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

На рис. 10 приведено звено триангуляции. Координаты исходных пунктов A, B, C, D , дирекционные углы α_{AC} и α_{BD} и базисы b_{AC} и b_{BD} не подлежат уравниванию.

По аналогии с полигонометрией запишем

$$W_X = X_B^{выч.} - X_B^{исх.}; \quad W_Y = Y_B^{выч.} - Y_B^{исх.};$$

Наиболее простой путь передачи координат от точки A к точке B по ходовой линии, углами поворота которой являются промежуточные углы γ_i.

$$W_X = X_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} S_i \cos\alpha_i - X_B^{исх.};$$

$$W_Y = Y_A^{исх.} + \sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i - Y_B^{исх.};$$

дифференцируя которые, найдем

$$\sum_{i=1}^{K} V_{S_i} \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} + W_X = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{K} V_{S_i} \sin\alpha_i + \sum_{i=1}^{K} S_i \cos\alpha_i V_{\alpha_i} + W_Y = 0, \tag{32}$$

Уравнения (31), (32) были бы окончательными, если v_S заменить v_β и v_τ, так как в триангуляции измеряют не стороны, а углы.

По аналогии v_α заменить через v_γ, последнее приведено в табл. 1 для равенства

$$\sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} = \Delta y_1 V_{\alpha_1} + \Delta y_2 V_{\alpha_2} + \ldots + \Delta y_K V_{\alpha_K}$$

и согласно колонке 4, табл. 1 запишем

$$\sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} = -(y_{\text{B}} - y_{\text{A}})V_{\gamma_1} + (y_{\text{B}} - y_2)V_{\gamma_2} - (y_B - y_3)V_{\gamma_3} + \ldots. +$$

$$+(y_B - y_K)V_{\gamma_K} = -(y_{K+1} - y_1)V_{\gamma_1} + (y_{K+1} - y_2)V_{\gamma_2} - (y_{K+1} - y_3)V_{\gamma_3} + \ldots. +$$

$$+(y_{K+1} - y_K)V_{\gamma_K} = \sum_{i=1}^{K} (-1)^i (y_{K+1} - y_i) v_{\gamma_i}$$

В соответствии с колонкой 4, табл. 2, имеем

$$(X_B - X_A)R_1 + (X_B - X_2)R_2 + (X_B - X_3)R_3 + \ldots + (X_B - X_K)R_K =$$

$$= (X_{K+1} - X_1)R_1 + (X_{K+1} - X_2)R_2 + (X_{K+1} - X_3)R_3 + \ldots + (X_{K+1} - X_K)R_K =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} (X_{K+1} - X_i)R_i = \sum_{i=1}^{K} (X_{K+1} - X_i)\left(\text{ctg}\beta_i v_{\beta_i} - \text{ctg}\tau_i v_{\tau_i}\right)$$

Таблица 1

Преобразование по замене v_α через v_γ

№ п/п	Замена α через γ	Замена v_α через v_γ	Аналогичные преобразования
1	2	3	4
1	$\alpha_1 = \alpha_H - \gamma_1$	$v_{\alpha_1} = -v_{\gamma_1}$	$-\Delta y_1 v_{\gamma_1}$
2	$\alpha_2 = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2$	$v_{\alpha_2} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2}$	$-\Delta y_2 v_{\gamma_1} + \Delta y_2 v_{\gamma_2}$
3	$\alpha_3 = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$	$v_{\alpha_3} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} - v_{\gamma_3}$	$-\Delta y_3 v_{\gamma_1} + \Delta y_3 v_{\gamma_2} - \Delta y_3 v_{\gamma_3}$
...	....	....	....
K	$\alpha_K = \alpha_H - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ $+ \ldots + \gamma_K$	$v_{\alpha_K} = -v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} -$ $-v_{\gamma_3} + \ldots + v_{\gamma K}$	$-\Delta y_K v_{\gamma_1} + \Delta y_K v_{\gamma_2} -$ $-\Delta y_K v_{\gamma_3} + \ldots + \Delta y_K v_{\gamma_K}$

Таблица 2

Преобразование по замене v_S через v_β и v_γ

№ п/п	Замена S через β и τ	Замена v_S через v_β и v_τ	Аналогичные преобразования
1	2	3	4
1	$S_1 = \dfrac{b\sin\beta_1}{\sin\tau_1}$	$v_{S_1} = S_1\left(\text{ctg}\beta_1 v_{\beta_1} - \text{ctg}\tau_1 v_{\tau_1}\right)$	$R_i = \left(\text{ctg}\beta_i v_{\beta_i} - \text{ctg}\tau_i v_{\tau_i}\right)$ $\Delta X_1 R_1$

Окончание табл. 2

1	2	3	4
2	$S_2 = \dfrac{b\sin\beta_1 \sin\beta_2}{\sin\tau_1 \sin\tau_2}$	$v_{S_2} = S_2\sum_{i=1}^{2}\left(\text{ctg}\beta_i v_{\beta_i} - \text{ctg}\tau_i v_{\tau i}\right)$	$\Delta X_2 R_1 + \Delta X_2 R_2$
3	$S_3 = \dfrac{b\sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3}{\sin\tau_1 \sin\tau_2 \sin\tau_3}$	$v_{S_3} = S_3\sum_{i=1}^{3}\left(\text{ctg}\beta_i v_{\beta_i} - \text{ctg}\tau_i v_{\tau i}\right)$	$\Delta X_3 R_1 + \Delta X_3 R_2 + \Delta X_3 R_3$
...	....	....	....
K	$S_\text{K} = \dfrac{b\prod_{i=1}^{\text{K}}\sin\beta_i}{\prod_{i=1}^{\text{K}}\sin\tau_i}$	$v_{S_K} = S_K\sum_{i=1}^{K}\left(\text{ctg}\beta_i v_{\beta_i} - \text{ctg}\tau_i v_{\tau_i}\right)$	$\Delta X_K R_1 + \Delta X_K R_2 +$ $+\Delta X_K R_3 + \ldots + \Delta X_K R_K$

Подставляя в (31) полученные из табл. 1 и табл. 2 суммы, окончательно запишем условие абсцисс

$$\sum_{i=1}^{K}-\left[\left(X_{K+1}-X_i\right)\text{ctg}\beta_i\nu''_{\beta_i}-\left(X_{K+1}-X_i\right)\text{ctg}\tau_i\nu''_{\tau_i}+\left(-1\right)^{i+1}\left(y_{K+1}-y_i\right)\nu''_{\gamma_i}\right]+$$
$$+W_X\rho''=0$$

Так как вывод для условия ординат, см. формулу (32) аналогичен, окончательно запишем

$$\sum_{i=1}^{K}\left[\left(Y_{K+1}-Y_i\right)\text{ctg}\beta_i\nu''_{\beta_i}-\left(Y_{K+1}-Y_i\right)\text{ctg}\tau_i\nu''_{\tau_i}+\left(-1\right)^{i}\left(X_{K+1}-X_i\right)\nu''_{\gamma_i}\right]+W_Y\rho''=0$$

12. УСЛОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАМЫКАЮЩЕЙ ДЛЯ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА БЕЗ ПРИМЫЧНЫХ УГЛОВ

Если ход на рис. 11 проложен без примычных углов β_1 и β_{K+1}, то получим координатную привязку, а свободный член условия замыкающей примет вид

$$W_S = S_{AB}^{выч.} - S_{AB}^{исх.} = \sqrt{\left(X_{K+1}^{выч.} - X_1^{исх.}\right)^2 - \left(Y_{K+1}^{выч.} - Y_1^{исх.}\right)^2} - S_{AB}^{исх.} = \\ = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{K} S_i \cos\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{K} S_i \sin\alpha_i\right)^2} - S_{AB}^{исх.} \tag{33}$$

Дифференцируя (33) по S получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{2S_{AB}}\left(2\sum_{i=1}^{K}\Delta X_i \cos\alpha_i V_{S_i} + 2\sum_{i=1}^{K}\Delta Y_i \sin\alpha_i V_{S_i}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{1}{2S_{AB}}\left(-2\sum_{i=1}^{K}\Delta X_i S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} + 2\sum_{i=1}^{K}\Delta Y_i S_i \cos\alpha_i V_{\alpha_i}\right),$$

так как измеряют β, а не α, заменим в предыдущем v_α через v_β по аналогии с параграфом 10.

$$\sum_{i=1}^{K}\Delta X_i S_i \sin\alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=2}^{H}\Delta X_i\left(Y_{K+1} - Y_i\right)V_{\beta_i},$$

где $i = 2$ взято потому, что при любой функции f

$$\nu_{\beta_1} = f\left(\nu_{\alpha_1}\right) = 0.$$

$$\sum_{i=2}^{K}\Delta Y_i S_i \cos\alpha_i V_{\alpha_i} = \sum_{i=2}^{K}\Delta Y_i\left(X_{K+1} - X_i\right)V_{\beta_i}$$

тогда
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{1}{S_{AB}}\sum_{i=2}^{K}\left\{\left[\Delta Y_i\left(X_{K+1} - X_i\right) - \Delta X_i\left(Y_{K+1} - Y_i\right)\right]\frac{\nu''_{\beta_i}}{\rho''}\right\}$$

Окончательно условное уравнение замыкающей примет вид

$$\sum_{i=1}^{K}\left[\frac{\Delta X_i}{S_{AB}}\cos\alpha_i + \frac{\Delta Y_i}{S_{AB}}\sin\alpha_i\right]\nu_{S_i} + \\ + \sum_{i=2}^{K}\left\{\left[\frac{\Delta Y_i}{S_{AB}}\left(X_{K+1} - X_i\right) - \frac{\Delta X_i}{S_{AB}}\left(Y_{K+1} - Y_i\right)\right]\frac{\nu''_{\beta_i}}{\rho''}\right\} + W_S = 0.$$

13. ОБЩИЙ ПРИЕМ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТРИЛАТЕРАЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА БУТЛЕРА

В трилатерации, как правило, число избыточных измерений ограничено. Например, в центральной системе и в геодезическом четырехугольнике избыточно измерена одна сторона. Здесь возникает одно условие. По аналогии с триангуляцией такое условие можно назвать условием фигуры.

Практически условное уравнение в трилатерации удобно записывать через углы, а затем поправки углов заменять поправками измеренных сторон. С этой целью рассмотрим дифференциальную зависимость изменения угла от изменения стороны треугольника (рис. 17).

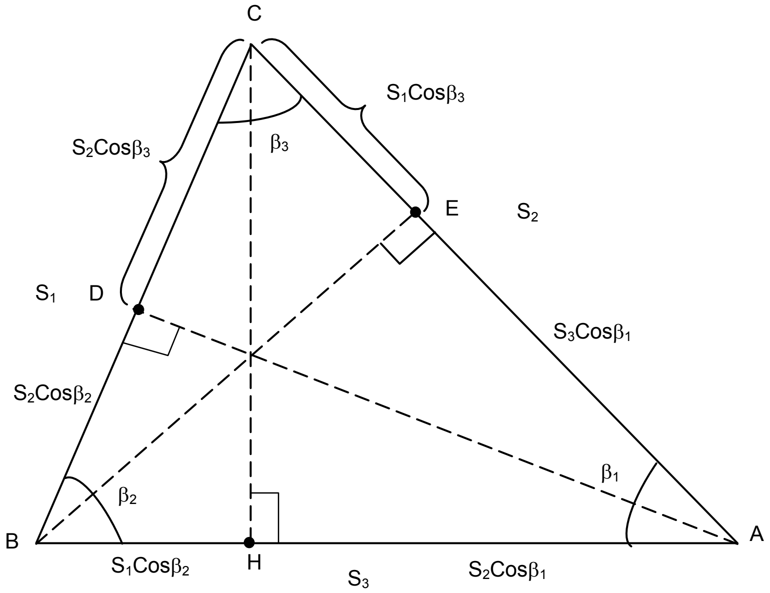


Рис. 17. Треугольник трилатерации

Для вывода формулы Бутлера воспользуемся теоремой косинусов

$$
\begin{aligned}
S_1^2 &= S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\cos\beta_1; \\
S_2^2 &= S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\cos\beta_2; \qquad (34)\\
S_3^2 &= S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\beta_3.
\end{aligned}
$$

Продифференцируем первое из трех уравнений по переменным S_1, S_2, S_3 и β_1. Сокращая в левой и правой части 2, получим

$$S_1dS_1 = S_2dS_2 + S_3dS_3 - S_3\cos\beta_1 dS_2 - S_2\cos\beta_1 dS_3 + S_2S_3\sin\beta_1 d\beta_1$$

отсюда

$$d\beta_1 = \frac{1}{S_2S_3\sin\beta_1}\left[dS_2\left(S_3\cos\beta_1 - S_2\right) + dS_3\left(S_2\cos\beta_1 - S_3\right) + S_1dS_1\right].$$

Из рис. 17 видно, что $S_3 \cos\beta_1 - S_2 = -S_1 \cos\beta_3$;
$S_2 \cos\beta_1 - S_3 = -S_1 \cos\beta_2$.

Подставляем полученные равенства в предыдущее и, переходя от дифференциалов к поправкам, окончательно получим

$$v''_{\beta_1} = \frac{S_1 \rho''}{S_2 S_3 \sin\beta_1}\left(v_{S_1} - \cos\beta_3 v_{S_2} - \cos\beta_2 v_{S_3}\right);$$

тогда для остальных двух уравнений (34) без вывода запишем

$$\begin{aligned} v''_{\beta_2} &= \frac{S_2 \rho''}{S_1 S_3 \sin\beta_2}\left(v_{S_2} - \cos\beta_3 v_{S_1} - \cos\beta_1 v_{S_3}\right); \\ v''_{\beta_3} &= \frac{S_3 \rho''}{S_1 S_2 \sin\beta_3}\left(v_{S_3} - \cos\beta_2 v_{S_1} - \cos\beta_1 v_{S_2}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Приведем пример. На рис. 18 показана центральная система трилатерации, для которой, как было указано выше, условие горизонта имеет вид

$$v''_{\gamma_1} + v''_{\gamma_2} + v''_{\gamma_3} + W'' = 0$$

Пользуясь формулами (35), для углов γ_1, γ_2, γ_3 запишем

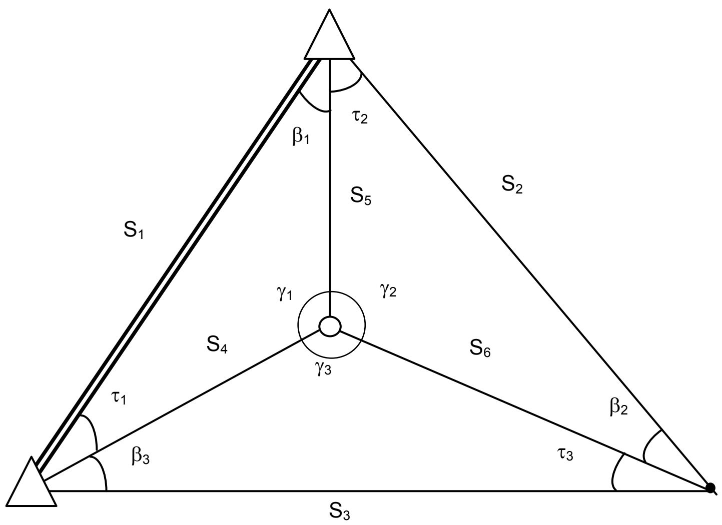


Рис. 18. Центральная система трилатерации

$$v_{\gamma_1} = \frac{S_1 \rho''}{S_4 S_5 \sin\gamma_1}\left(v_{S_1} - \cos\tau_1 v_{S_4} - \cos\beta_1 v_{S_5}\right);$$

$$v_{\gamma_2} = \frac{S_2 \rho''}{S_5 S_6 \sin\gamma_2}\left(v_{S_2} - \cos\tau_2 v_{S_5} - \cos\beta_2 v_{S_6}\right);$$

$$v_{\gamma_3} = \frac{S_3 \rho''}{S_4 S_6 \sin\gamma_3}\left(v_{S_3} - \cos\tau_3 v_{S_6} - \cos\beta_3 v_{S_4}\right).$$

14. ДОПУСТИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из теории метода наименьших квадратов известна формула

$$W_{доп.} = t\sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \sigma_i^2}\,, \tag{36}$$

где t – вероятностный квантиль, принимаемый в зависимости от вероятности величины 2,0 или 2,5;

b – коэффициенты условного уравнения (или строка матрицы $B_{r\times N}$)

σ – стандарт измерений, участвующий при вычислении весов измерений.

Приведем формулы вычисления $W_{доп.}$ для различных условных уравнений.

Для условия фигур

$$W_{доп.} = 2{,}5\sigma_\beta \sqrt{n}\,, \tag{37}$$

где n – число углов в фигуре.

Для условия дирекционных углов

$$W_{доп.} = 2{,}5\sqrt{\sigma_\beta^2 n + m_{\alpha_H}^2 + m_{\alpha_K}^2}\,, \tag{38}$$

где $m_{\alpha н}$, $m_{\alpha к}$ – средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов.

Для условия базиса

$$W_{доп.} = 2{,}5\sqrt{\sigma_\beta^2 \sum_{i=1}^{N} \mathrm{ctg}^2\beta_i + \left(\frac{m_b}{b}\rho''\right)_{нач.}^2 + \left(\frac{m_b}{b}\rho''\right)_{кон.}^2}\,, \tag{39}$$

где $\dfrac{m_b}{b}\rho''$ – ошибки базисных сторон.

Для условия координат

$$\left.\begin{aligned} W_{X_{доп.}} &= 2{,}5\sqrt{\left(\frac{\sigma''_\beta}{\rho''}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} b_X^2 + 2m_X^2} \\ W_{Y_{доп.}} &= 2{,}5\sqrt{\left(\frac{\sigma''_\beta}{\rho''}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} b_Y^2 + 2m_Y^2} \end{aligned}\right\}, \tag{40}$$

где b_X, b_Y – коэффициенты условных уравнений;

m_X, m_Y – погрешности в координатах исходных пунктов.

15. СУЩНОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

Выше рассмотрен коррелатный способ уравнивания, основанный на оптимизации условного экстремума. В параметрическом способе применяется абсолютный экстремум минимизации целевой функции

$$\Phi\left(X\right)=\sum_{i=1}^{N}P_iL_i^2\left(X\right), \tag{41}$$

где

$$L\left(X\right)=f\left(X\right)-T, \tag{42}$$

вектор свободных членов параметрических уравнений, в котором $f(X)$ – вычисленное по неизвестным X значение измеренной величины T.

Если минимум функции (41) найден, то

$$V=f\left(\hat{\mathrm{X}}\right)-T, \tag{43}$$

где $\hat{\mathrm{X}}$ – оценки параметров (уравненные координаты пунктов),

V – вектор поправок в результаты измерений,

$f\left(\hat{\mathrm{X}}\right)$ – значение уравненных измерений.

Таким образом,

$$\Phi\left(\hat{\mathrm{X}}\right)=\sum_{i=1}^{N}P_iV_i^2=\min. \tag{44}$$

16. ВИДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ ДЛЯ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

В этом подразделе рассмотрим виды нелинейных уравнений (42) для различных измеренных величин.

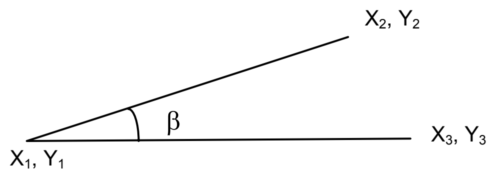
Для дирекционного угла α между двумя точками с координатами X_1, Y_1; X_2, Y_2

$$L\left(X_1, Y_1, X_2, Y_2\right) = \operatorname{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} - \alpha\,; \tag{45}$$

для измеренной стороны S имеем

$$L\left(X_1, Y_1, X_2, Y_2\right) = \sqrt{\left(X_1 - X_2\right)^2 + \left(Y_1 - Y_2\right)^2} - S\,; \tag{46}$$

для измеренного горизонтального угла β имеем $X = \left[x_{1,} y_{1,} x_{2,} y_{2,} x_{3,} y_3\right]^T$



$$L\left(X\right) = \left(\operatorname{arctg}\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \operatorname{arctg}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) - \beta\ ; \tag{47}$$

17. ПРИВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ

Решение систем нелинейных уравнений – задача сложная. Поэтому приводят эти уравнивания к линейному виду, используя разложение в ряд Тейлора, но для этого необходимо знать приближенные значения параметров $X^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_t^{(0)} \right]^T$, т.е. нужно знать предварительные координаты пунктов и в качестве неизвестных параметров будут уже не сами координаты X, а поправки к приближенным координатам

$$\hat{X} = X^{(0)} + \delta X , \tag{48}$$

где $\hat{X}$ – вектор оценок параметров;

$X^{(0)}$ – вектор предварительных значений неизвестных;

δX – вектор поправок в значения параметров.

В линейном виде имеем $T_i = f\left(x_1, x_2, ..., x_t\right)$, где t – число параметров.

$$\hat{T}_i = T_i + v_i , \tag{49}$$

где $\hat{T}_i$ –уравнение значения измерений;

T_i – измеренные величины;

v_i – поправки в измеренные величины.

$$T_i + v_i = f_i\left(x_1^{(0)}, ..., x_t^{(0)}\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_{X = X^0} \delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_{X = X^0} \delta x_2 + ... + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_{X = X^0} \delta x_t ,$$

где частные производные обозначим через коэффициенты a_{ij} линейных параметрических уравнений, тогда

$$v_i = a_{i1}\delta x_1 + a_{i2}\delta x_2 + ... + a_{it}\delta x_t + l_i , \tag{50}$$

где $l_i = f_i\left(X^{(0)}\right) - T_i$ – свободный член параметрического уравнения, входящий в вектор $L(X)$ в качестве компоненты.

18. АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

Приведем алгоритм параметрического способа уравнивания в матричной форме записи, в которой система линейных параметрических уравнений имеет вид

$$V_{N\times 1} = A_{N\times t}\delta X_{t\times 1} + L_{N\times 1}, \tag{51}$$

где используются следующие векторы и матрицы

$$V_{N\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}; \qquad \delta X_{t\times 1} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_t \end{pmatrix}; \qquad L_{N\times 1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix};$$

$$A_{N\times t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nt} \end{pmatrix}; \quad P_{N\times N} = \begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & P_2 & & & \\ & & P_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P_N \end{pmatrix},$$

где $P_{N\times N}$ – диагональная матрица весов, некоррелированных измерений, используемая при отыскании неизвестных $\delta X_{t\times 1}$ под условием (44).

Поскольку число неизвестных $\delta X_{t\times 1}$ меньше количества уравнений N, то система (51) называется переопределенной и, для получения однозначного решения под условием МНК обычно переходят к нормальным уравнениям, которые можно получить, умножая слева (51) на $A^T P$

$$A^T_{t\times N} P_{N\times N} V_{N\times 1} = A^T_{t\times N} P_{N\times N} A_{N\times t}\delta X_{t\times 1} + A^T_{t\times N} P_{N\times N} L_{N\times 1},$$

где в левой части получаем градиент целевой функции (41), а он в точке минимума равен 0. Обозначим $R = A^T PA$, $B = A^T PL$ соответственно через матрицу коэффициентов нормальных уравнений R и вектор свободных членов нормальных уравнений. С учетом обозначений имеем

$$R_{t\times t}\delta X_{t\times 1} + B_{t\times 1} = 0, \tag{52}$$

откуда

$$\delta X_{t\times 1} = -Q_{t\times t} B_{t\times 1},$$

где $Q_{t\times t} = R_{t\times t}^{-1}$ – обратная весовая матрица, используемая не только при уравнивании, но и при оценке точности функции по формуле (8) с применением равенства

$$\frac{1}{P_F} = f_{1\times t} Q_{t\times t} f_{t\times 1}^T,$$

где f – оцениваемая функция со строкой коэффициентов

$$f_{1\times t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad .... \quad \frac{\partial f}{\partial x_t} \right),$$

откуда видно, что коэффициенты весовой функции получаются по тем же правилам, что и коэффициенты линейных параметрических уравнений для различных измеренных величин.

Вопросом вычисления $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ для различных измеренных величин посвящены следующие подразделы.

19. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ ИЗМЕРЕННОГО ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА

В геодезической практике обычно измеряют азимуты, которые редуцируют на плоскость проекции и получают дирекционные углы. Как отмечалось выше свободный член нелинейного параметрического уравнения для дирекционного угла α_{AB} можно вычислить по формуле

$$l\left(X_A, Y_A, X_B, Y_B\right) = \operatorname{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \alpha_{AB}. \tag{53}$$

Перейдем от этого нелинейного уравнения по формуле

$$v_\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial X_A}\right)\delta X_A + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_A}\right)\delta Y_A + \left(\frac{\partial f}{\partial X_B}\right)\delta X_B + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_B}\right)\delta Y_B + \rho'' l. \tag{54}$$

Найдем частные производные, входящие в (54)

$$\frac{\partial f}{\partial X_A} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\Delta Y}{\Delta X^2}\right)\cdot(-1) = \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial X_B} = -\frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2};$$

далее получим

$$\frac{\partial f}{\partial Y_A} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}\right)^2}\cdot\frac{1}{\Delta X}\cdot(-1) = -\frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial Y_B} = \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2}.$$

Подставляя частные производные в (54), предварительно умножив их на l и ρ'', получим в соответствии с (50) следующие коэффициенты линейного параметрического уравнения

$$a_{AB} = \rho'' \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}^2} = \rho'' \frac{\sin \alpha_{AB}}{S_{AB}}; \qquad a_{BA} = -a_{AB}; \tag{55}$$

$$b_{AB} = -\rho'' \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}^2} = -\rho'' \frac{\cos \alpha_{AB}}{S_{AB}}; \qquad b_{BA} = -b_{AB}.$$

В общем виде имеем

$$v_{\alpha_{AB}} = a_{AB}\delta x_A + b_{AB}\delta y_A + a_{BA}\delta x_B + b_{BA}\delta y_B + l. \tag{56}$$

20. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ ИЗМЕРЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ГОРИЗОНТАЛЬНОГО УГЛА

Пусть имеем на пункте пучок направлений M_{A_i} после их предварительной обработки. Дирекционный угол любого направления вычисляют по формуле

$$\alpha_{AB} = Z_A + M_{AB},$$

где Z_A – ориентирный угол или дирекционный угол первого (начального) направления, для которого $M_{A_1} = 0$. Тогда свободный член направления AB будет таким

$$l_{AB} = \alpha_{AB}^{выч.} - \left(Z_A^{выч.} + M_{AB}\right),$$

где $Z_A^{выч.} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{A_i}^{выч.} - M_{A_i}\right)}{n}$, в котором n – число направлений на пункте A.

Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_A}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y_A}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x_B}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y_B}$ аналогичны тем, которые приведены в разделе 19. В этом случае вместо (55) запишем

$$v_{M_{AB}} = -\delta Z_A + a_{AB}\delta x_A + b_{AB}\delta y_A + a_{BA}\delta x_B + b_{BA}\delta y_B + l''_{AB}. \qquad (57)$$

Здесь δZ_A – поправка в ориентирный угол $Z_A^{выч.}$, участвующая в уравнивании как неизвестная, которую обычно исключают из обработки по первому правилу Шрейбера. Знак минус поставлен при δZ потому, что $\dfrac{\partial f}{\delta Z_A} = -1$.

Поправки в ориентирные углы отсутствуют при уравнивании триангуляции «по углам». Получим уравнение поправок для измеренного горизонтального угла β между двумя направлениями AB и AC. Свободный член нелинейного параметрического уравнения имеет вид

$$l_\beta = \left(\alpha_{AC}^{выч.} - \alpha_{AB}^{выч.}\right) - \beta^{изм.}.$$

Чтобы получить линейное параметрическое уравнение поправок воспользуемся формулой (57)

$$v_\beta = v_{M_{AC}} - v_{M_{AB}} = \left(a_{AC} - a_{AB}\right)\delta x_A + \left(b_{AC} - b_{AB}\right)\delta y_A +$$
$$+ a_{CA}\delta x_C + b_{CA}\delta y_C - a_{BA}\delta x_B - b_{BA}\delta y_B + l''_\beta,$$

где коэффициенты a и b вычисляются по формулам (55).

21. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ ИЗМЕРЕННЫХ РАССТОЯНИЙ

В геодезической практике применяют наклонные дальности, которые редуцируют на эллипсоид и плоскость некоторой проекции. Свободный член нелинейного параметрического уравнения для горизонтального расстояния имеет вид

$$l_{S_{AB}} = S_{AB}^{выч.} - S_{AB}^{изм.} = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + \left(Y_B - Y_A\right)^2} - S_{AB}^{изм.}. \quad (58)$$

Для перехода к линейному параметрическому уравнению воспользуемся (54) и найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial X_A} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot (\Delta X)}{2\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} = -\frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}} = -\cos\alpha_{AB};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial X_B} = \frac{\Delta X_{AB}}{S_{AB}} = +\cos\alpha_{AB} = -\cos\alpha_{BA};$$

далее получим

$$\frac{\partial f}{\partial Y_A} = \frac{-1(2\Delta Y)}{2\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} = -\frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}} = -\sin\alpha_{AB};$$

без вывода запишем

$$\frac{\partial f}{\partial Y_B} = \frac{\Delta Y_{AB}}{S_{AB}} = \sin\alpha_{AB} = -\sin\alpha_{BA}.$$

Подставляя частные производные в (54), имеем

$$v_{S_{AB}} = -\cos\alpha_{AB}\delta x_A - \sin\alpha_{AB}\delta y_A - \cos\alpha_{BA}\delta x_B - \sin\alpha_{BA}\delta y_B + l_{S_{AB}}.$$

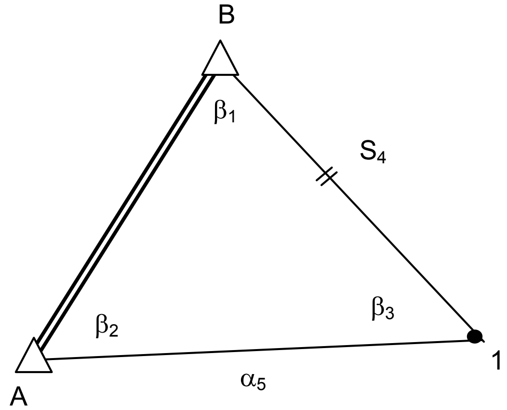


Рис. 19. Линейно-угловая засечка

Приведем пример. На рис. 19 изображена линейно-угловая засечка пункта 1 относительно исходных пунктов *A* и *B*, с измеренными величинами β_1, β_2, β_3, S_4 и α_5.

$$v_{\beta_1} = \left(a_{BA} - a_{B1}\right)\delta x_B + \left(b_{BA} - b_{B1}\right)\delta y_B + a_{AB}\delta x_A + b_{AB}\delta y_A - a_{1B}\delta x_1 - b_{1B}\delta y_1 + l_1,$$

$$v_{\beta_2} = \left(a_{A1} - a_{AB}\right)\delta x_A + \left(b_{A1} - b_{AB}\right)\delta y_A + a_{1A}\delta x_1 + b_{1A}\delta y_1 - a_{BA}\delta x_B - b_{BA}\delta y_B + l_2,$$

$$v_{\beta_3} = \left(a_{1B} - a_{1A}\right)\delta x_1 + \left(b_{1B} - b_{1A}\right)\delta y_1 + a_{B1}\delta x_B + b_{B1}\delta y_B - a_{A1}\delta x_A - b_{A1}\delta y_A + l_3,$$

$$v_{S_4} = -\cos\alpha_{B1}\delta x_B - \sin\alpha_{B1}\delta y_B - \cos\alpha_{1B}\delta x_1 - \sin\alpha_{1B}\delta y_1 + l_{S_4}$$

$$v_{\alpha_5} = a_{A1}\delta x_A + b_{A1}\delta y_A + a_{1A}\delta x_1 + b_{1A}\delta y_1 + l_\alpha.$$

В нашем случае $\delta x_A = \delta y_A = \delta x_B = \delta y_B = 0$, так как пункты *A*, *B* исходные и их координаты остаются неизменными.

В этом случае система линейных параметрических уравнений поправок имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
v_{\beta_1} &= -a_{1B}\delta x_1 - b_{1B}\delta y_1 - l_{\beta_1}\\
v_{\beta_2} &= a_{1A}\delta x_1 + b_{1A}\delta y_1 + l_{\beta_2}\\
v_{\beta_3} &= \left(a_{1B} - a_{1A}\right)\delta x_1 + \left(b_{1B} - b_{1A}\right)\delta y_1 + l_{\beta_3}\\
v_{S_4} &= -\cos\alpha_{1B}\delta x_1 - \sin\alpha_{1B}\delta y_1 + l_{S_4}\\
v_{\alpha_5} &= a_{1A}\delta x_1 + b_{1A}\delta y_1 + l_\alpha
\end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
Предварительная обработка угловых и линейных измерений

Задание

1. Выполнить предварительную обработку измеренных направлений по формуле

$$M = M^{изм.} + c'' + r'' + \delta'', \tag{1.1}$$

где *c* – поправка за центрировку;
r – поправка за редукцию;
δ – поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в геодезической проекции.

2. Предварительная обработка линейных измерений выполняется по формуле

$$S = S^{изм.} + c_M + r_M + \delta 1_M + \delta 2_M + \delta 3_M, \tag{1.2}$$

где *c* – поправка за центрировку;
r – поправка за редукцию;
δ1 – поправка за приведение линии к горизонту;
δ2 – поправка за редукцию горизонтального проложения на референц-эллипсоид;
δ3 – поправка за переход с эллипсоида на плоскость геодезической проекции.

Цель работы: изучить основные этапы предварительных вычислений.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Коррелатный способ уравнивания звена триангуляции

Задание

1. По одному из десяти вариантов геодезических сетей (см. Приложение) научиться определять виды условных уравнений.
2. Подсчитать и назвать условные уравнения, возникающие в звене триангуляции, показанного на рис. 1.
3. Составить первую таблицу для условного уравнения базиса.
4. Вычислить свободные члены условий координат.
5. Вычислить коэффициенты условий абсцисс и ординат.
6. Вычислить свободный член условия полюса.
7. Свести в единую таблицу коэффициенты всех шести условных уравнений второй группы и вычислить преобразованные коэффициенты по правилу Н.А. Урмаева.
8. Средствами линейной алгебры вычислить поправки в измерения.

Цель работы: выполнить практическую апробацию формул по известным теоретическим разработкам.

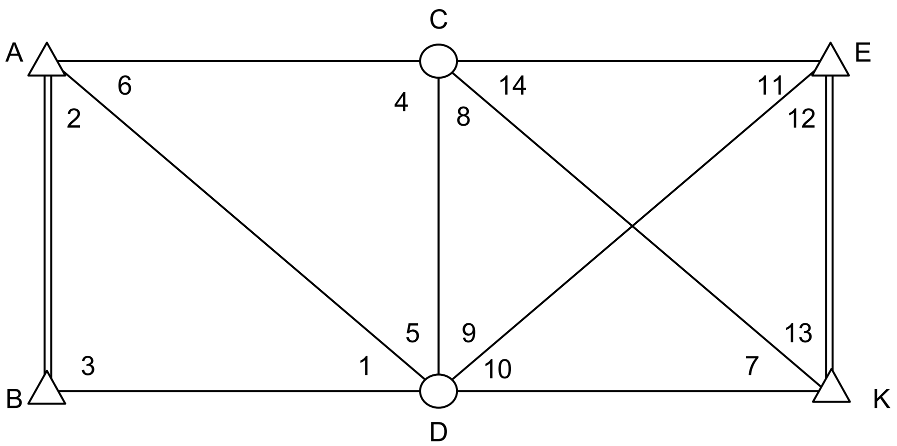


Рис. 1. Схема сети

Коррелатный способ уравнивания звена триангуляции

№ треуг.	№ углов	Названия вершин	Измеренные углы	Первичные поправки	Предвар. уравн. углы	Sin предвар. уравн. углов	Ctg β	Значения предварит. сторон	Вторичные поправки	Уравненные углы	№ углов	Поправки из уравнивания
1	1	D	36 43 06,69	– 0,04	06,65	0,597 8842	1,34	11 830,87	– 0,19	36 43 06,46	1	– 0,23
	2	A	30 26 12,55	– 0,04	12,51	0,506 5878	1,70	10 024,31	+ 0,25	30 26 12,76	2	+ 0,21
	3	B	112 50 40,90	– 0,06	40,84	0,921 5607	– 0,42	18 235,75	– 0,06	112 50 40,78	3	– 0,12
	Σ		180 00 00,14		00,00				0	00,00		
	W		+ 0,14									
2	4	C	95 19 13,48	– 0,23	13,25	0,995 6919	– 0,09	18 235,75	+ 0,08	92 19 13,33	4	– 0,15
	5	D	42 04 04,33	– 0,22	04,11	0,670 0096	1,11	12 270,99	– 0,13	42 04 03,98	5	– 0,35
	6	A	42 36 42,86	– 0,22	42,64	0,677 0281	1,09	12 399,53	+ 0,05	42 36 42,69	6	– 0,17
	Σ		180 00 00,67		00,00					00,00		
	W		+ 0,67									
3	7	K	55 26 35,42	+ 0,13	35,55	0,823 5644	0,69	12 399,53	+ 0,84	55 26 36,39	7	+ 0,97
	8	C	40 41 32,72	+ 0,13	32,85	0,651 9986	1,16	9 816,45	– 0,31	40 41 32,54	8	– 0,18
	9 + 10	D	83 51 51,34	+ 0,26	51,60	0,994 2716	0,11	14 969,68	– 0,53	83 51 51,07	9	+ 0,99
	Σ		179 59 59,48		00,00					00,00	10	– 1,26
	W		– 0,52									
											11	– 1,29
4	11+12	E	81 16 24,64	– 0,64	24,00	0,988 4234	0,15	14 969,68	+ 0,06	81 16 24,06	12	+ 0,71
	13	K	66 31 02,56	– 0,32	02,24	0,917 1804	0,43	13 890,71	– 0,96	66 31 01,28	13	– 1,28
	14	C	32 12 34,08	– 0,32	33,76	0,533 0148	1,59	8 072,52	+ 0,90	32 12 34,66	14	+ 0,58
	Σ		180 00 01,28									
	W		+ 1,28									
Всп. углы	9		57 56 22,73	+ 0,13	22,86	0,847 4898	0,63		+ 0,86	57 56 23,72		
	10		25 55 28,61	+ 0,13	28,74	0,437 1888	2,06		– 1,39	25 55 27,35		
	11		49 09 30,37	– 0,32	30,05	0,756 5199	0,86		– 0,97	49 09 29,08		
	12		32 06 54,27	– 0,32	53,95	0,531 6201	1,59		+ 1,03	32 06 54,98		

Условие фигур: $\upsilon_7 + \upsilon_{10} + \upsilon_{12} + \upsilon_{13} + 0'',48 = 0$

$$W_b = \frac{S^{выч.} - S^{исх.}}{S^{исх.}} \cdot \rho'' = -1'',13 \qquad [VV] = 7{,}969$$

$$\mu = 0{,}89$$

Условие базиса:

Вычисление свободных членов условий координат

Формулы		1.A	2.B	1.A	2.D	1.C	2.D
		3.D		3.C		3.K	
α_{12}	α_{21}	109° 29′ 57,15″	289° 29′ 57,15″	79° 03′ 44,64″	259° 03′ 44,64″	121° 07′ 48,75″	301° 07′ 48,75″
$\angle 1$	$\angle 2$	– 30 26 12,51	+ 112 50 40,84	– 42 36 42,64	+ 42 04 04,11	– 40 41 32,85	+ 83 51 51,60
α_{13}	α_{23}	79 03 44,64	42 20 37,99	36 27 02,00	301 07 48,75	80 26 15,90	24 59 40,35
x_3		6 193 781,22	6 193 781,22	6 200 191,59	6 200 191,59	6 202 678,34	6 202 678,34
x_1	x_3	6 190 321,17	6 186 372,10	6 190 321,17	6 193 781,22	6 200 191,59	6 193 781,22
Δx		+ 3 460,05	+ 7 409,12	+ 9 870,42	+ 6 410,37	+ 2 486,75	+ 8 897,12
Cos α		0,189 7398	0,739 1154	0,804 3698	0,516 9847	0,166 1191	0,906 3481
S		18 235,75	10 024,31	12 270,99	12 399,53	14 969,68	9 816,45
Sin α		0,981 8344	0,673 5788	0,594 1289	– 0,855 9946	0,986 1057	0,422 5320
Δy		+ 17 904,49	– 6 752,16	+ 7 290,55	– 10 613,94	+ 14 761,70	+ 4 147,76
y_1	y_2	12 300 000,00	12 311 152,32	12 300 000,00	12 317 904,48	12 307 290,54	12 317 904,48
y_3		12 317 904,49	12 317 904,48	12 307 290,55	12 307 290,55	12 322 052,24	12 322 052,24

Вычисление коэффициентов условных уравнений координат

№ тр-ков	Назв. вершин	X км	Y км	$x_n - x_i$	$y_n - y_i$	ctgα	– ctgβ	(a)	(b)	©	Коэффициенты условных уравнений абсцисс			Коэффициенты условных уравнений ординат		
											(a) $(x_n - x)$ ctgα	(b) $(x_n - x)$ (– ctgβ)	© $-(y_n - y)$	(a) $(y_n - y)$ ctgα	(b) $(y_n - y)$ (– ctgβ)	© $(x_n - x)$
1	A	6 190,32	12300,00	12,36	22,05	–0,42	–1,34	3	1	–2	– 5,19	– 16,56	+ 22,05	– 9,26	– 29,55	– 12,36
2	D	6 193,78	12317,90	8,90	4,15	1,09	0,09	6	4	5	+ 9,67	+ 0,80	– 4,15	+ 4,52	+ 0,39	+ 8,90
3	C	6 200,19	12307,29	2,49	14,76	0,11	–0,69	9+10	7	–8	+ 0,27	– 1,72	+ 14,76	+ 1,62	– 10,18	– 2,49
4	K	6 202,68	12322,05	0	0	1,59	-0,15	14	11+12	13						

Условие абсцисс:

$$-0,52\upsilon_3 + 0,97\upsilon_6 + 0,03\upsilon_9 + 0,03\upsilon_{10} - 1,66\upsilon_1 + 0,08\upsilon_4 - 0,17\upsilon_7 + 2,20\upsilon_2 - 0,42\upsilon_5 + 1,48\upsilon_8 - 0'',41 = 0$$

Условие ординат:

$$-0,93\upsilon_3 + 0,45\upsilon_6 + 0,16\upsilon_9 + 0,16\upsilon_{10} - 2,96\upsilon_1 + 0,04\upsilon_4 - 1,02\upsilon_7 - 1,24\upsilon_2 + 0,89\upsilon_5 - 0,25\upsilon_8 + 0'',62 = 0$$

Условие полюса: $0,63\upsilon_9 + 1,59\upsilon_{14} + 1,59\upsilon_{12} + 0,69\upsilon_7 - 1,16\upsilon_8 - 0,86\upsilon_{11} - 0,43\upsilon_{13} - 2,06\upsilon_{10} - 8'',66 = 0$

Условие дирекционных углов: $-\upsilon_2 + \upsilon_5 - \upsilon_8 + \upsilon_{13} + 1,03 = 0$

Вычисление свободного члена условного уравнения полюса

№ углов	Предварительно уравненные углы	Sin предвар. уравн. углов	Ctg β	№ углов	Предварительно уравненные углы	Sin предвар. уравн. углов	Ctg β
9	57 56 22,86	0,847 4898	0,63	8	40 41 32,85	0,651 9986	1,16
14	32 12 33,76	0,533 0148	1,59	11	49 09 30,05	0,756 5199	0,86
12	32 06 53,95	0,531 6201	1,59	13	66 31 02,24	0,917 1804	0,43
7	55 26 25,55	0,823 5644	0,69	10	25 55 28,74	0,437 1888	2,06
	П = 0,197 7755				П = 0,197 7838		

Вычисление преобразованных коэффициентов 2-й группы

№ треуг-ков	№ углов	a	b	c	d	e	g	f	A	B	C	D	E	G	F
	1			– 1,34		– 1,66	– 2,96		0	0,33	– 075	0	– 1,67	– 1,25	
1	2		– 1			+2,20	– 1,24		0	– 0,67	+0,59	0	+2,20	+0,47	
	3			– 0,42		– 0,52	– 0,93		0	0,34	+0,16	0	– 0,53	+0,78	
	Σ	0	– 1	– 1,76	0	+0,02	– 5,13								
	4			0,09		+0,08	+0,04		0	– 0,33	– 0,30	0	– 0,13	– 0,42	
2	5		1			– 0,42	+0,89		0	+0,67	– 0,39	0	– 0,63	+0,42	
	6			1,09		+0,97	+0,45		0	– 0,34	+0,69	0	0,76	0	
	Σ	0	1	1,18	0	+0,63	+1,38								
	7	1	– 1	– 0,69	0,69	– 0,17	– 1,02		0,5	0,25	- 0,57	1,16	– 0,51	– 0,78	
3	8				– 1,16	+1,48	– 0,25		– 0,5	– 0,75	0,12	– 0,68	1,14	– 0,01	
	9			0,11	+0,63	+0,03	+0,16		– 0,5	0,25	0,23	+1,10	– 0,31	+0,40	
	10	1		0,11	– 2,06	+0,03	+0,16		0,5	0,25	0,22	– 1,58	– 0,32	+0,39	
	Σ	2	– 1	– 0,47	– 1,90	+1,37	– 0,95								
	11			– 0,15	– 0,86				– 0,5	– 0,25	– 0,47	– 1,33	0	0	
4	12	1		– 0,15	1,59				0,5	– 0,25	– 0,47	+1,12	0	0	
	13	1	1		0,43				0,5	0,75	– 0,32	– 0,91	0	0	
	14			1,59	1,59				– 0,5	– 0,25	1,26	+1,12	0	0	
	Σ	2	1	+1,29	+1,89	0	0								
	W	+0,48	+1,03	– 1,13	– 8,66	– 0,41	+0,62								

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
Уравнивание звена триангуляции параметрическим способом

Задание

1. По одному из десяти вариантов геодезических сетей (см. Приложение) научиться подсчитывать число параметров при уравнивании по углам и по направлениям.

2. Взять координаты определяемых пунктов C и D из таблицы «Вычисление свободных членов условий координат, Задания № 2. У этих координат отсечь дециметры и сантиметры, чтобы можно было проверить дирекционные углы, вычисленные по предварительным координатам. Координаты исходных пунктов такие же, как в коррелатном способе (без отсечения).

3. Вычислить коэффициенты параметрических уравнений поправок для восьми сторон.

4. Составить сводную таблицу коэффициентов уравнения поправок.

5. Средствами линейной алгебры вычислить поправки к измерениям.

Цель работы: выполнить практическую апробацию формул по известным теоретическим разработкам.

Параметрический способ уравнивания звена триангуляции

Каталог координат пунктов

Назв. пунктов	Предварительные координаты		δ_x	δ_y	Уравненные координаты	
	X	Y			X	Y
A					6 190 321,17	12 300 000,00
B					6 186 372,10	12 311 152,32
E					6 209 445,11	12 317 650,23
K					6 202 678,36	12 322 052,21
C	6 200 191,0	12 307 290,0	0,60	0,54	6 200 191,60	12 307 290,54
D	6 193 781,0	12 317 904,0	0,25	0,50	6 193 781,25	12 317 904,50

Вычисление дирекционных углов сторон и коэффициентов уравнений поправок

Формулы	1 D	1 D	1 D	1 D	1 D	1 C	1 C	1 C
	2 A	2 B	2 C	2 E	2 K	2 A	2 K	2 E
y_2	12 300 000,00	12 311 152,32	12 307 290,00	12 317 650,23	12 322 052,21	12 300 000,00	12 322 052,21	12 317 650,23
y_1	12 317 904,0	12 317 904,0	12 317 904,0	12 317 904,0	12 317 904,0	12 307 290,0	12 307 290,0	12 307 290,0
Δy	– 17 904,00	– 6 751,68	– 10 614,00	– 253,77	+ 4 148,21	– 7 270,00	+ 14 762,21	+ 10 360,23
x_2	6 190 321,17	6 186 372,10	6 200 191,00	6 209 445,11	6 202 678,36	6 190 321,17	6 202 678,36	6 209 445,11
x_1	6 193 781,0	6 193 781,0	6 193 781,0	6 193 781,0	6 193 781,0	6 200 191,0	6 200 191,0	6 200 191,0
Δx	– 3 459,83	– 7 408,90	+ 6 410,00	+ 15 664,11	+ 8 897,36	– 9 869,83	+ 2 487,36	+ 9 254,11
$\mathrm{tg}\,\alpha = \Delta y/\Delta x$	+ 5,174 8207	+ 0,911 2931	– 1,655 8502	– 0,016 2007	+ 0,466 2293	+ 0,738 6145	+ 5,934 8908	+ 1,119 5274
α_{12}	259°03′46″,01	222°20′33″,72	301°07′42″,93	359°04′18″,67	24°59′46″,72	216°27′00″,40	80°26′08″,80	48°13′39″,67
S	18 235,23	10 023,82	12 399,40	15 666,16	9 816,86	12 270,19	14 970,30	13 891,47
a	– 11,10	– 13,86	– 14,24	– 0,21	+ 8,88	– 9,99	+ 13,59	+ 11,08
b	+ 2,15	+ 15,21	– 8,60	– 13,16	– 19,05	+ 13,52	– 2,29	– 9,89

Сводная таблица коэффициентов уравнений поправок, а также значений измеренных и уравненных величин

№ тр.	№ уг.	Измеренные углы	Углы выч. по предв. коорд.	Коэффициенты уравнений поправок				Св. чл.	Попр. из ур.	Уравненные углы
				δx_C	δy_C	δx_D	δy_D			
1	1	36 43 06,69	36 43 12,29	0,0	0,0	2,76	– 13,06	+ 5,60	– 0,26	36 43 06,43
	2	30 26 12,55	30 26 11,14	0,0	0,0	11,10	– 2,15	– 1,41	+ 0,25	30 26 12,80
	3	112 50 40,90	112 50 36,57	0,0	0,0	– 13,86	+ 15,21	– 4,33	– 0,13	112 50 40,77
	W	+ 0,14	00,00	0,00	0,00	0,00	0,00	– 0,14	– 0,14	00,00
2	4	95 19 13.48	95 19 17,47	– 24,23	4,92	14,24	8,60	+ 3,99	– 0,18	95 19 13.48
	5	42 04 04,33	42 03 56,92	+ 14,24	8,60	– 3,14	– 10,75	– 7,41	– 0,37	42 04 04,33
	6	42 36 42,86	42 36 45,61	+ 9,99	– 13,52	– 11,10	2,15	+ 2,75	– 0,12	42 36 42,86
	W	+ 0,67	00,00	0,00	0,00	0,00	0,00	– 0,67	– 0,67	00,00
3	7	55 26 35,42	55 26 22,08	13,59	– 2,29	– 8,88	+ 19,05	– 13,34	+ 0,98	55 26 36,40
	8	40 41 32,72	40 41 34,13	0,65	10,89	– 14,24	– 8,60	+ 1,41	– 0,19	40 41 32,53
	9	57 56 22,73	57 56 35,74	– 14,24	– 8,60	14,03	– 4,56	+ 13,01	+ 1,00	57 56 23,73
	10	25 55 28,61	25 55 28,05	0,0	0,0	+ 9,09	– 5,89	– 0,56	– 1,27	25 55 27,34
	W	– 0,52	00,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 0,52	+ 0,52	00,00
4	11	49 09 30,37	49 09 21,00	11,08	– 9,89	+ 0,21	+ 13,16	– 9,37	– 1,34	49 09 29,03
	12	32 06 54,27	32 07 01,56	0,0	0,0	– 0,21	– 13,16	+ 7,29	+ 0,65	32 06 54,92
	13	66 31 02,56	66 31 08,56	– 13,59	+ 2,29	0,0	0,0	+ 5,75	– 1,22	66 31 01,34
	14	32 12 34,08	32 12 29,13	2,51	+ 7,60	0,0	0,0	– 4,95	+ 0,63	32 12 34,71
	W	1,28	00,00	0,00	0,00	0,00	0,00	– 1,28	– 1,28	00,00

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные этапы математической обработки.
2. Коррелатный способ уравнивания.
3. Виды условных уравнений, возникающих в плановых геодезических сетях и подсчет их числа.
4. Условные уравнения фигур.
5. Условия горизонта.
6. Условия сумм или разности углов.
7. Условие дирекционных углов.
8. Условие сторон (базисов).
9. Условные уравнения полюса.
10. Условия координат в полигонометрии.
11. Условия координат в триангуляции.
12. Условное уравнение замыкающей для полигонометрического хода без примычных углов.
13. Общий прием составления условных уравнений в трилатерации. Дифференциальная формула Бутлера.
14. Допустимые величины свободных членов условных уравнений.
15. Сущность параметрического способа уравнивания.
16. Виды нелинейных параметрических уравнений связи для измеренных величин.
17. Приведение нелинейных параметрических уравнений к линейному виду.
18. Алгоритм параметрического способа уравнивания.
19. Составление уравнения поправок для измеренного дирекционного угла.
20. Составление уравнения поправок для измеренного направления и горизонтального угла.
21. Составление уравнения поправок для измеренных расстояний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении курса «Высшая геодезия: уравнительные вычисления» особое внимание уделить коррелатному способу. Здесь нужно правильно отыскивать независимые условные уравнения для различных геодезических сетей, приведенных в приложении. Наиболее сложными являются формулы разделов 10 – 12. Составить универсальную программу для ЭВМ по этим формулам до сих пор не удавалось, хотя этому вопросу были посвящены десятки кандидатских и несколько докторских диссертаций. Автоматизация коррелатного способа уравнивания стала возможной в комбинированных коррелатно-параметрических способах обработки, которые будут изучаться студентами на 5-м курсе в разделе «Математические методы и модели».

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплекс программ для геодезических вычислений на ЭВМ / сост. Маковский С. В., Мицкевич В. И. – Новополоцк : ПГУ, 1988 – 2005.

2. Маркузе, Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1989. – 248 с.

3. Маркузе, Ю. И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1990. – 240 с.

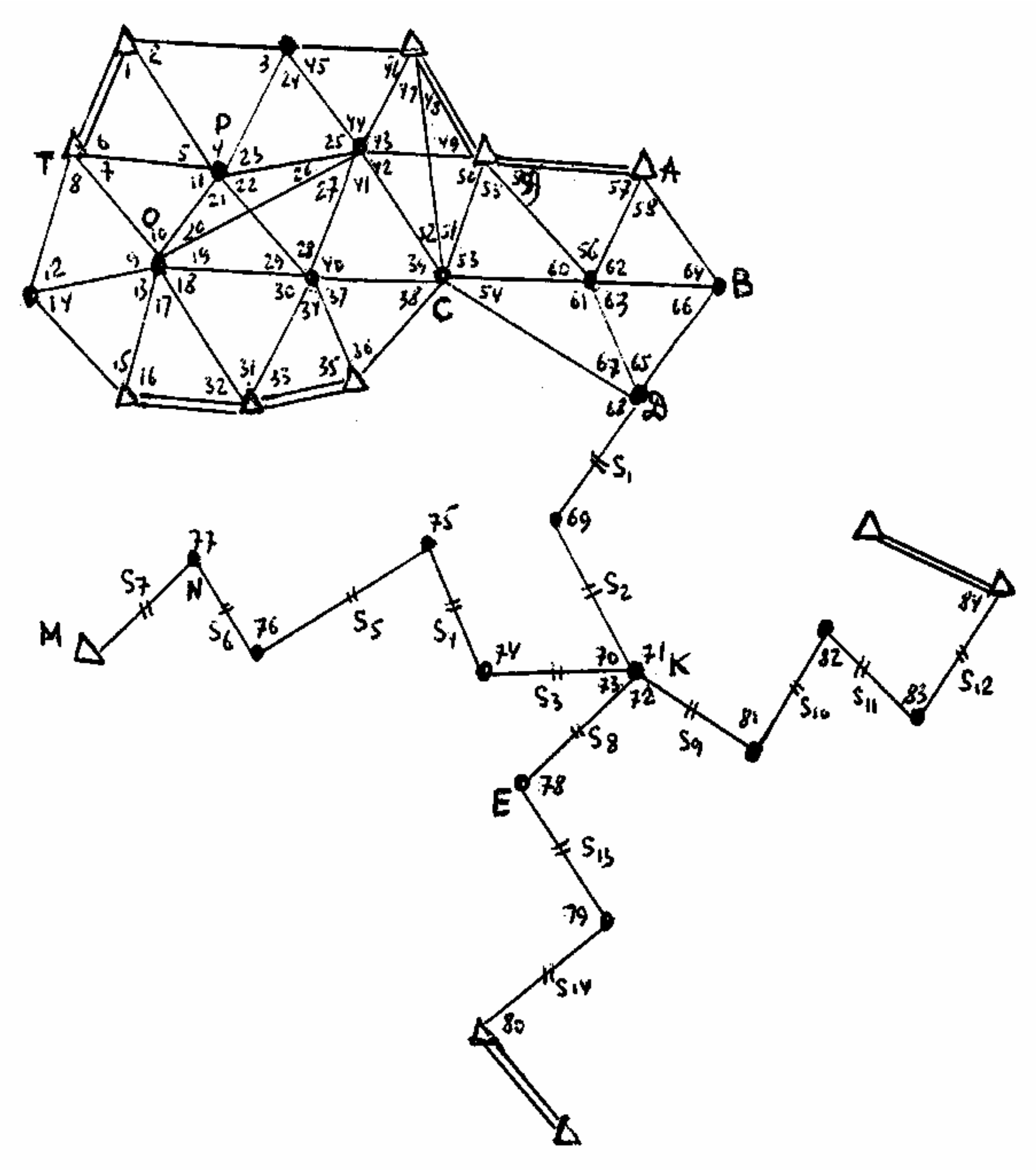
4. Машимов, М. М. Уравнивание геодезических сетей / М. М. Машимов. – М. : Недра, 1989.

5. Методические указания к пользованию комплексной программой / сост. Мицкевич В. И. – Новополоцк : ПГУ, 1988.

6. Яковлев, Н. В. Высшая геодезия / Н. В. Яковлев. – М. : Недра, 1990. – 445 с.

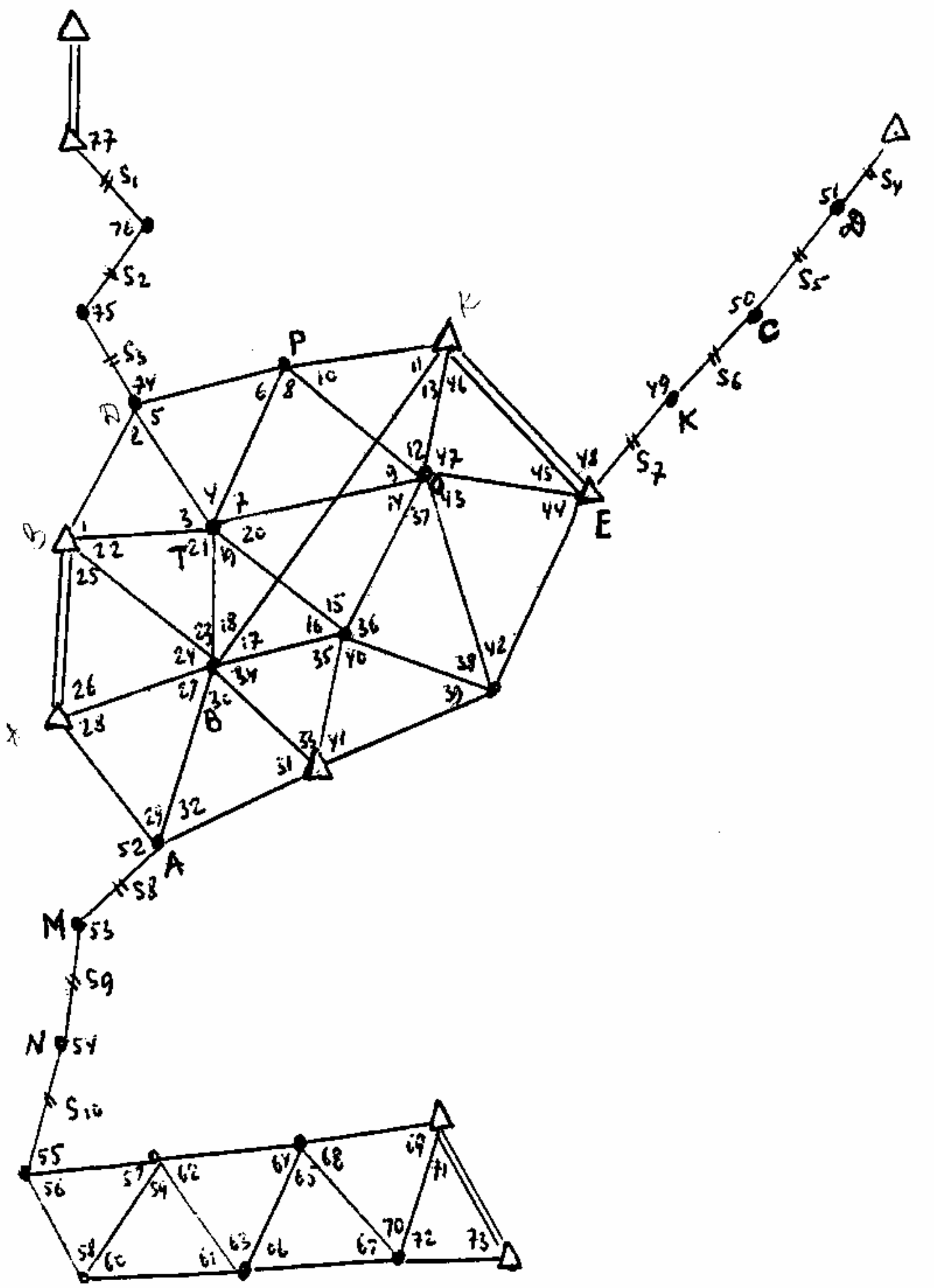
7. Яковлев, Н. В. Практикум по высшей геодезии / Н. В. Яковлев. – М. : Недра, 1982. – 368 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ



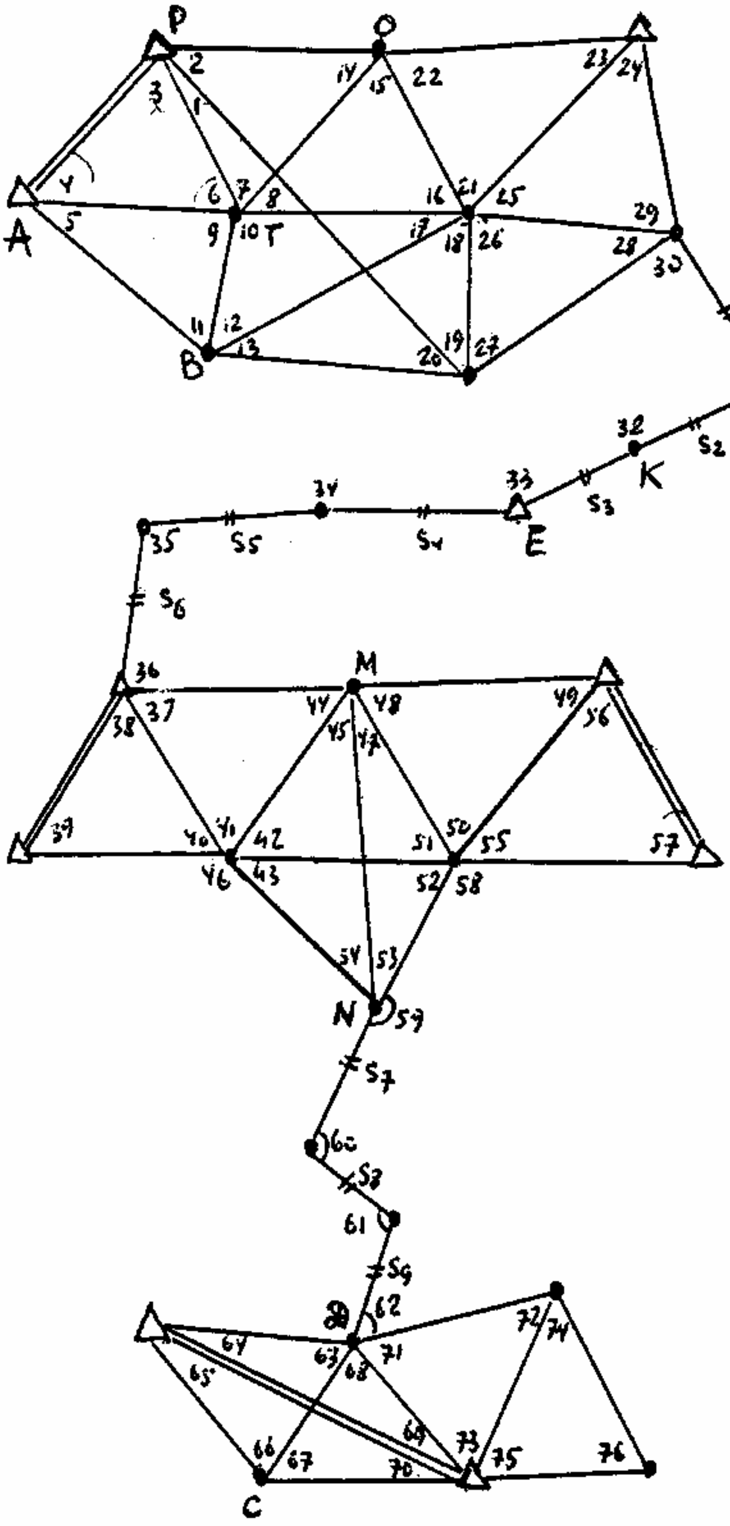
Вариант 1

109 направлений
84 угла
14 сторон
21 треугольник
21 определяемый пункт



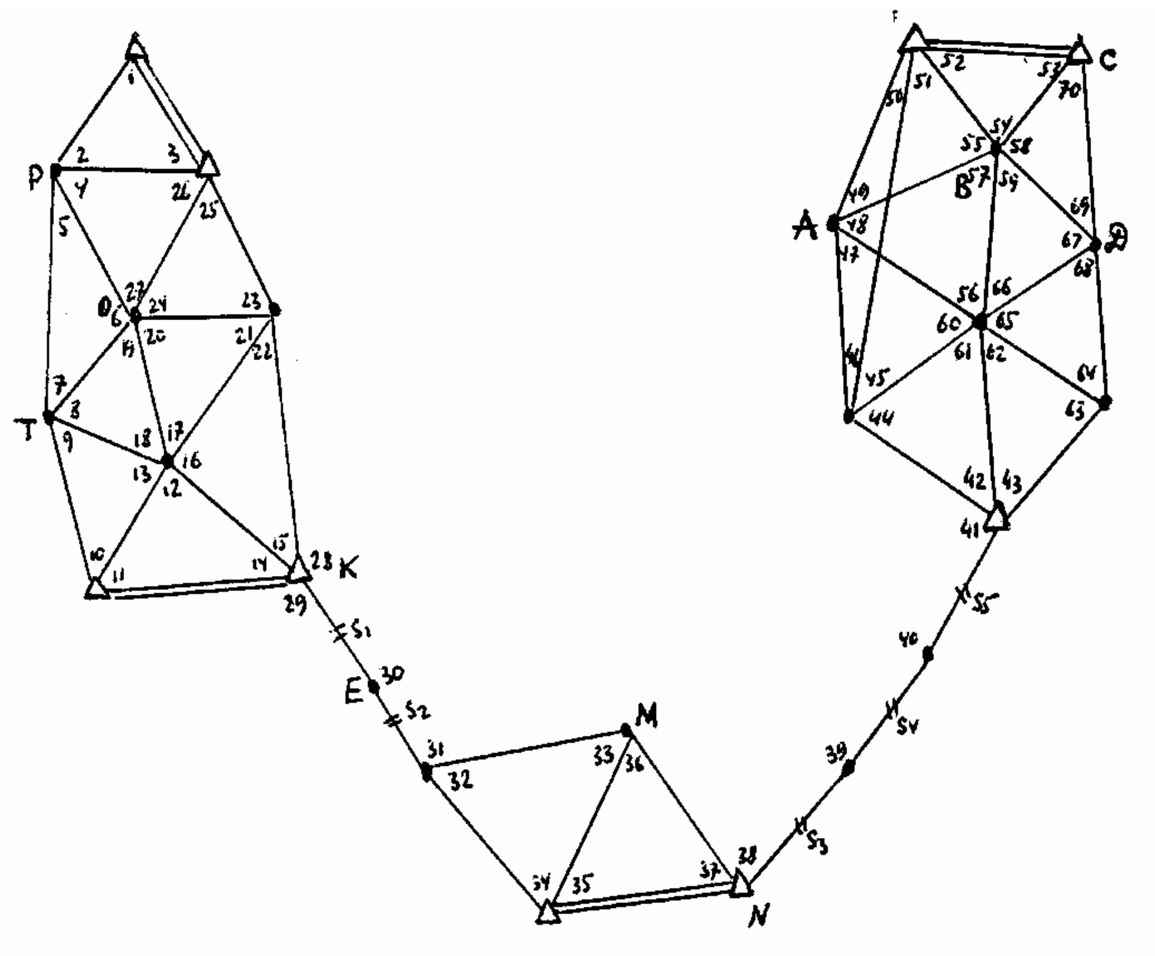
Вариант 2

102 направления
77 углов
10 сторон
21 треугольник
21 определяемый пункт



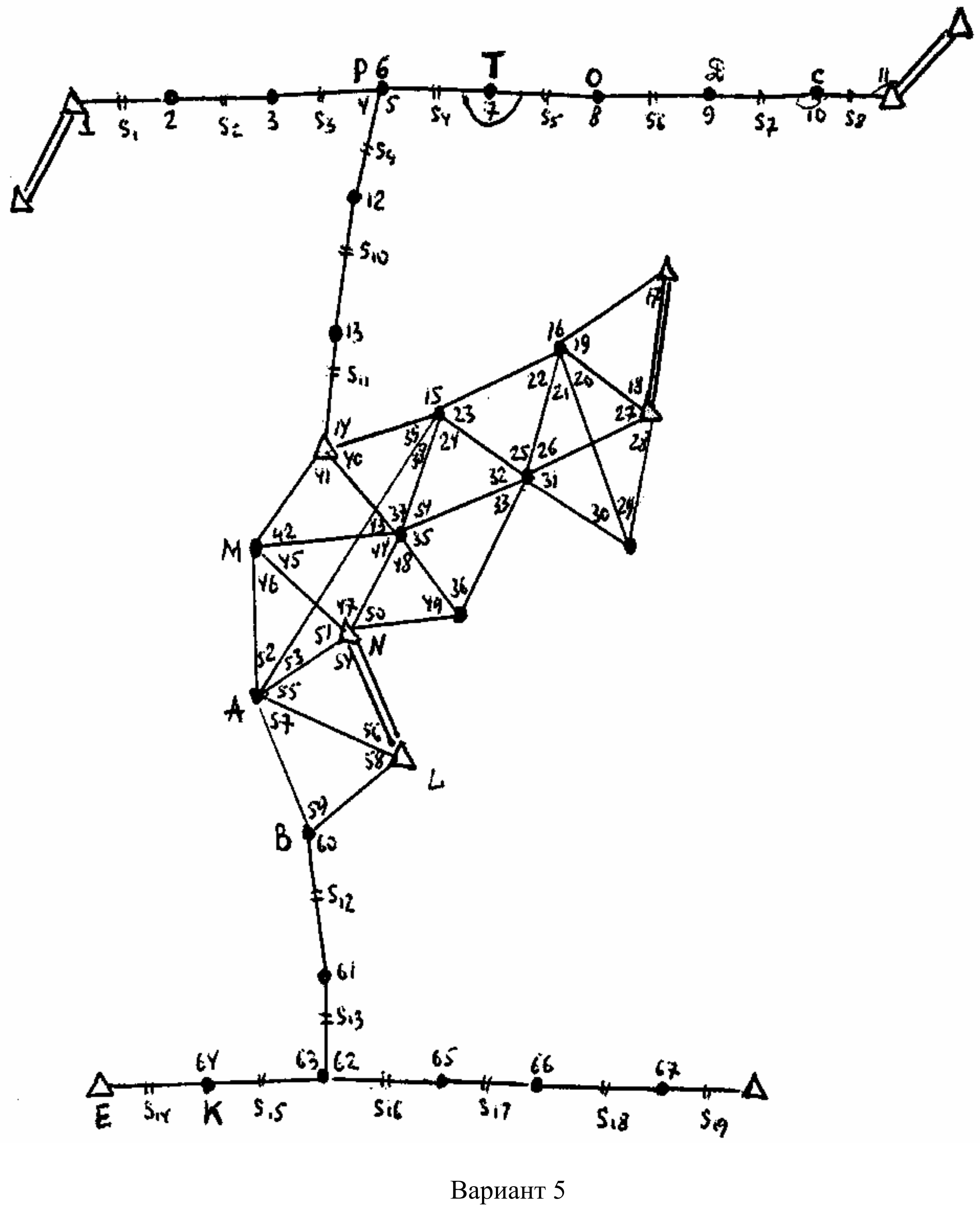
Вариант 3

102 направления
76 углов
9 сторон
19 треугольников
20 определяемых пунктов



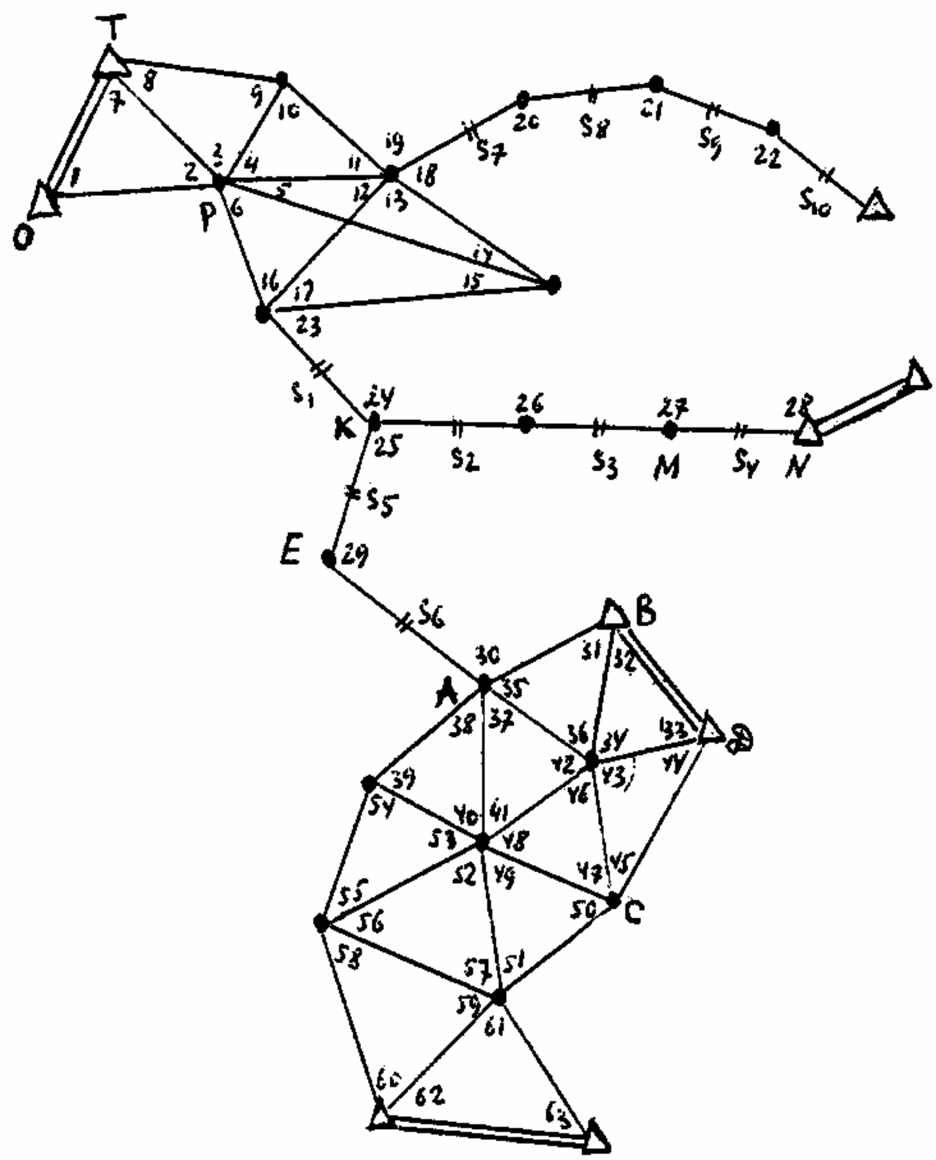
Вариант 4

90 направлений
70 углов
5 сторон
20 треугольников
16 определяемых пунктов



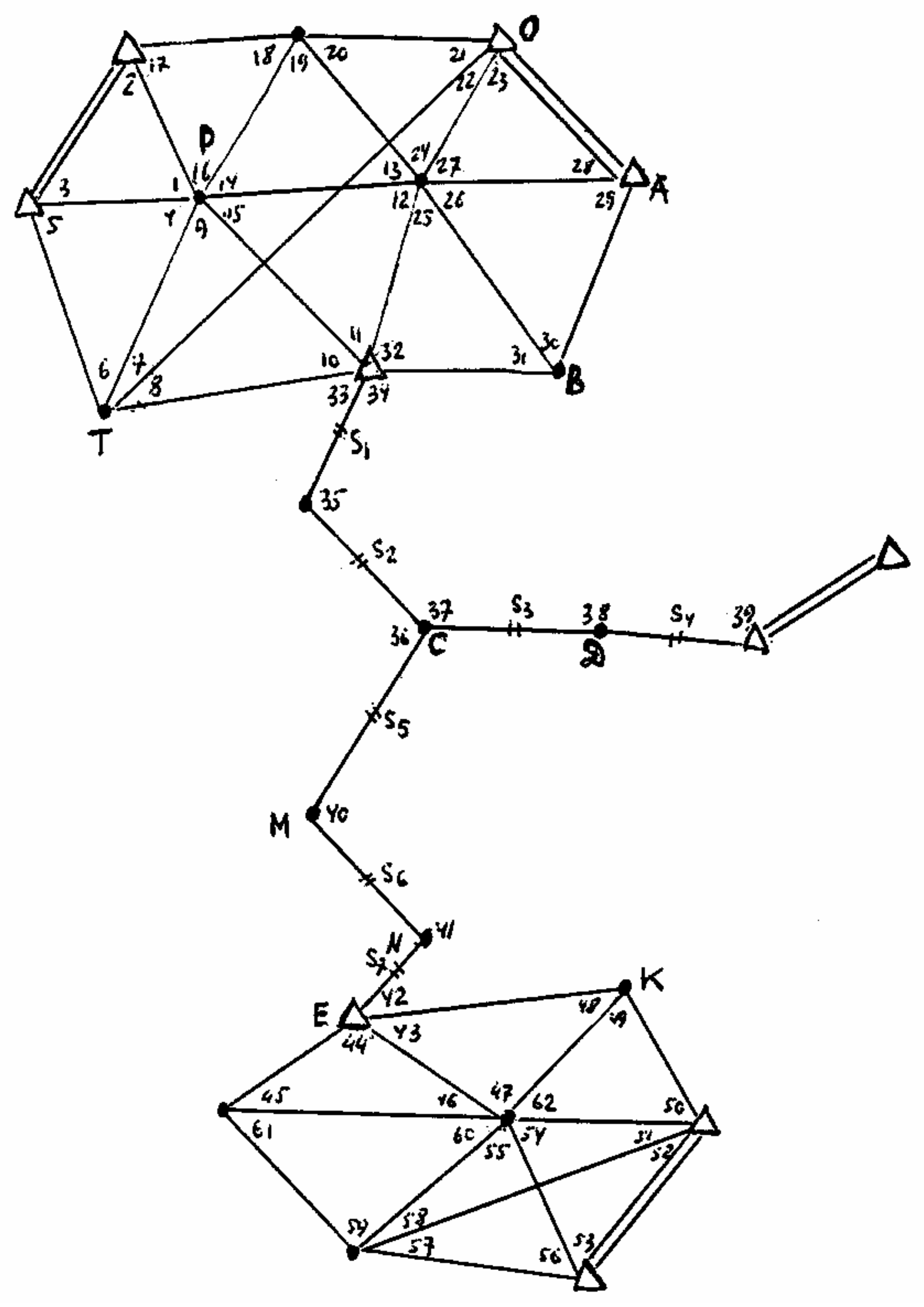
Вариант 5

94 направления
67 углов
19 сторон
13 треугольников
24 определяемых пункта



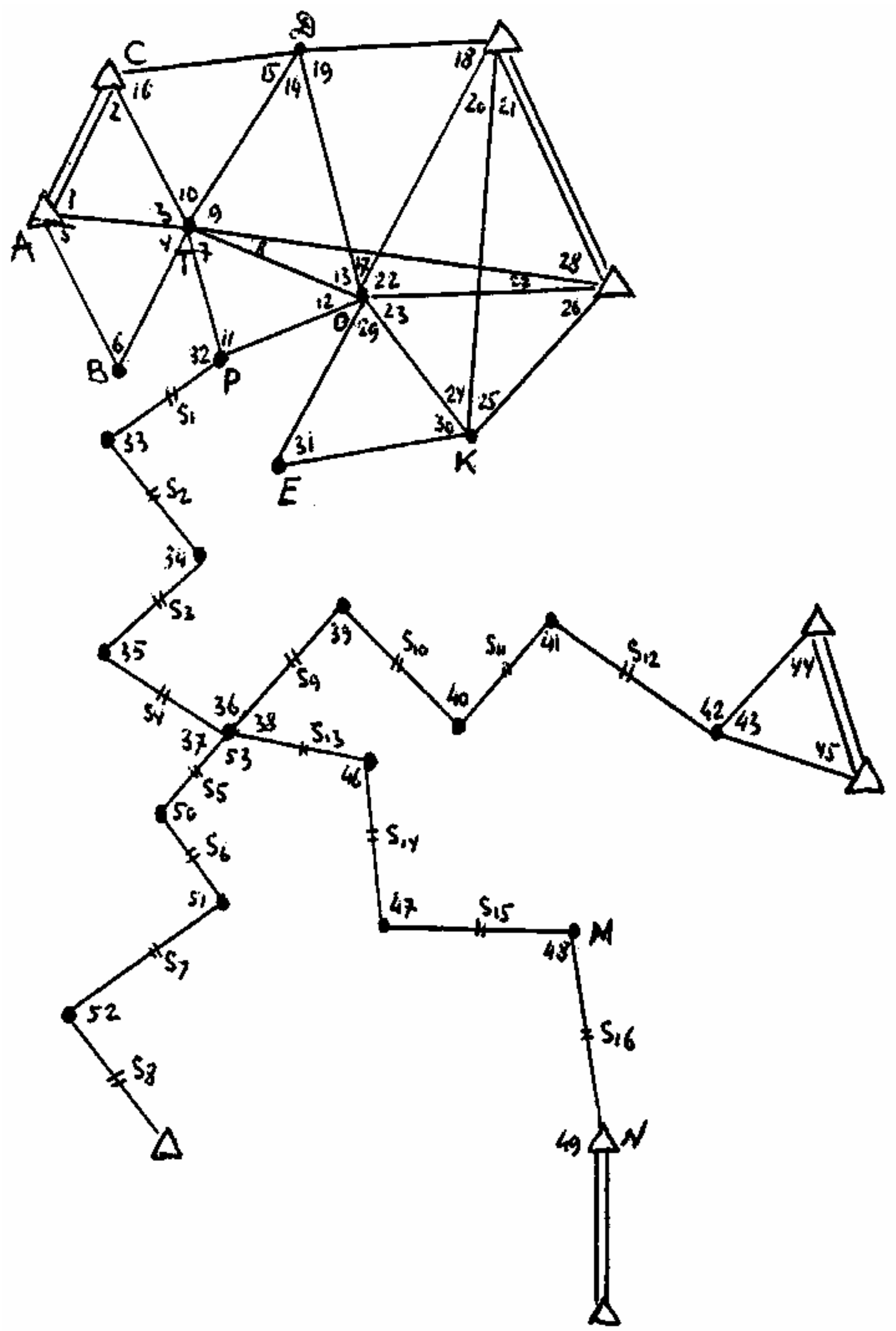
Вариант 6

86 направлений
63 угла
10 сторон
16 треугольников
19 определяемых пунктов



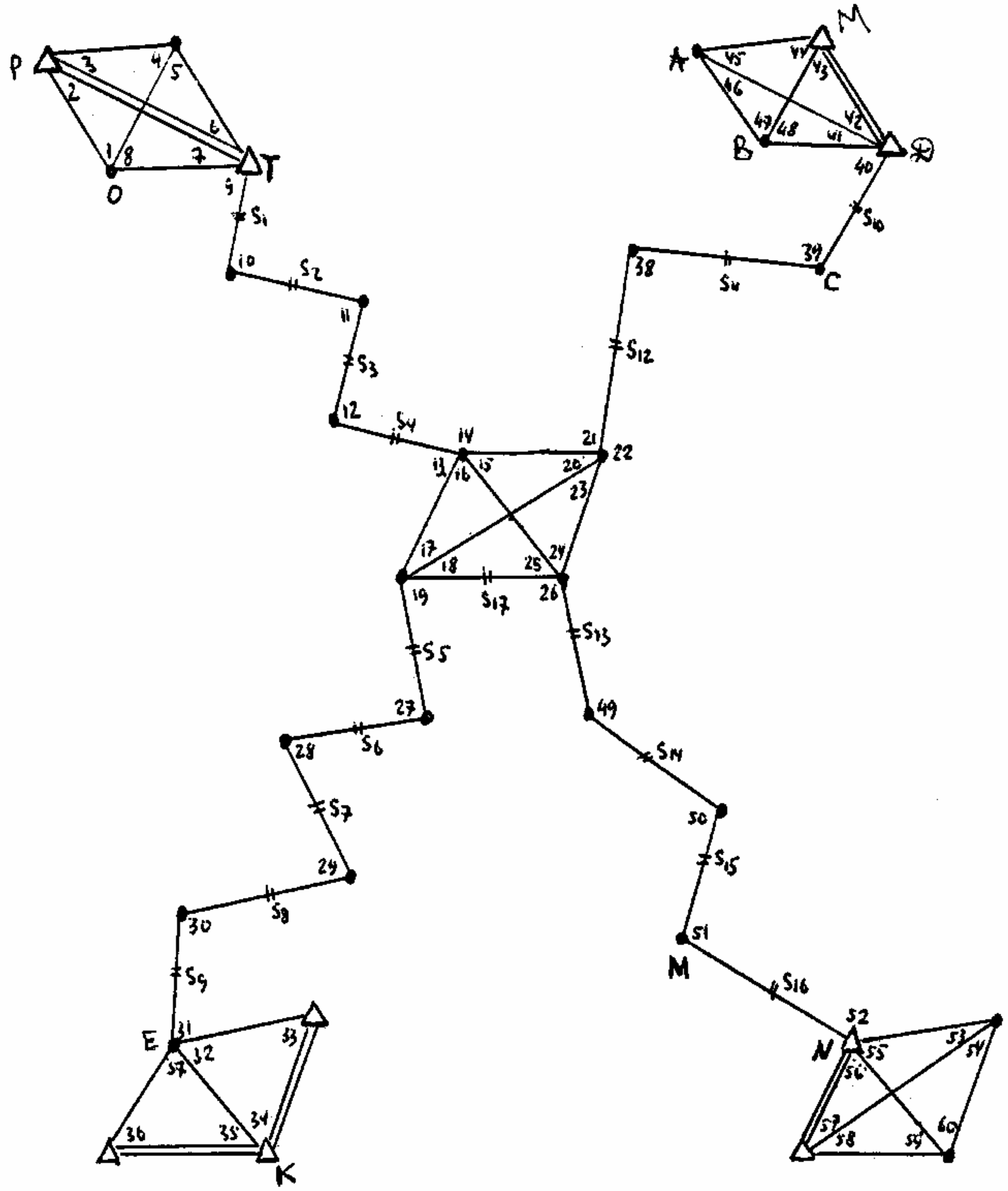
Вариант 7

81 направление
62 угла
7 сторон
16 треугольников
14 определяемых пунктов



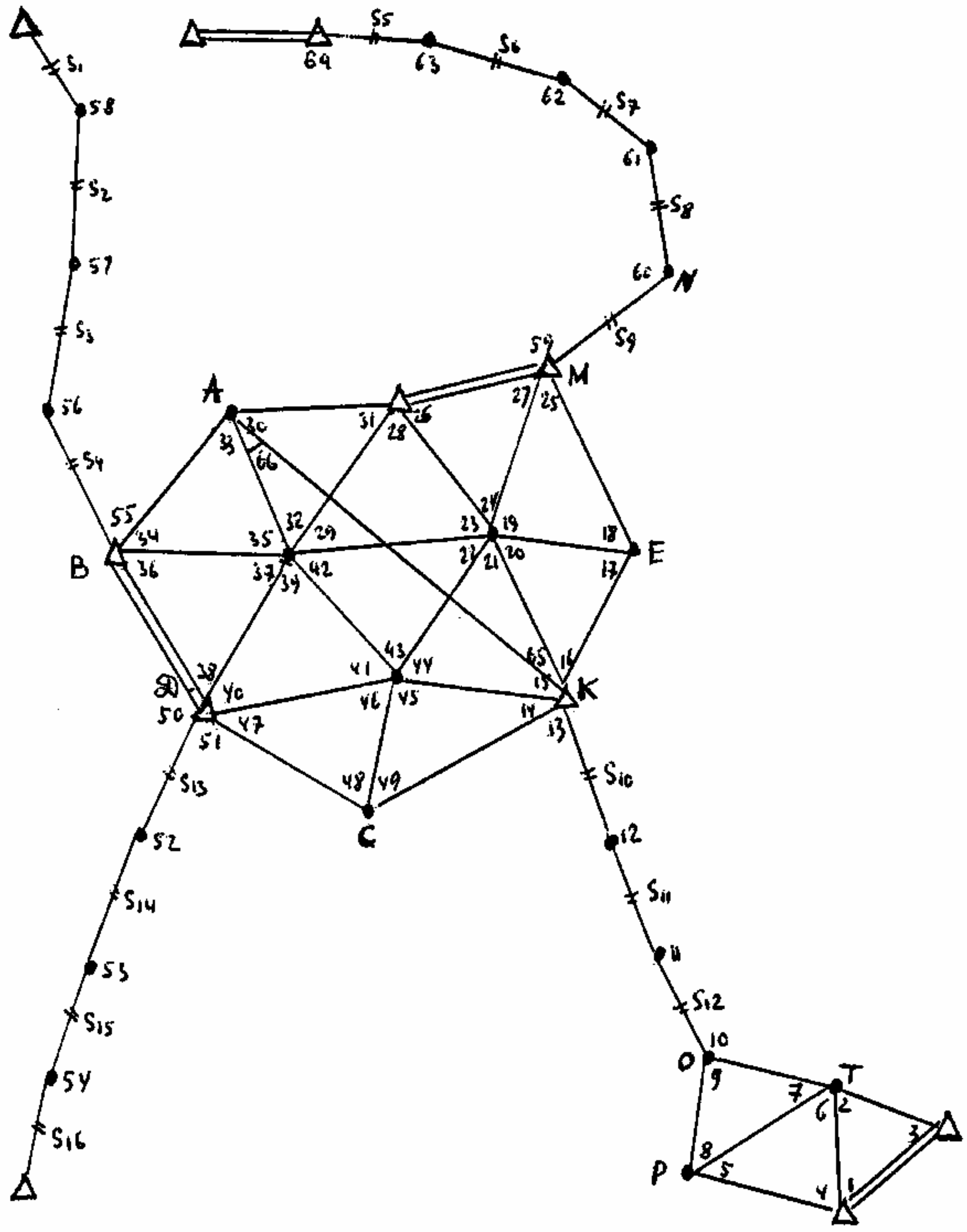
Вариант 8

80 направлений
53 угла
16 сторон
10 треугольников
21 определяемый пункт



Вариант 9

90 направлений
60 углов
17 сторон
10 треугольников
23 определяемых пунктов



Вариант 10

90 направлений
66 углов
16 сторон
15 треугольников
21 определяемый пункт

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ:
УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Составитель
МИЦКЕВИЧ Валерий Иванович

Редактор *Ю.М. Казакевич*

Дизайн обложки *И.С. Васильевой*

Подписано в печать 27.07.06. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,41. Уч.-изд. л. 3,36. Тираж 56 экз. Заказ 986.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04   ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29